RASSAL DEĞİŞKENLER VE OLASILIK DAĞILIMLARI

Yrd. Doç. Dr. Emre ATILGAN

RASSAL DEĞİŞKENLER VE OLASILIK DAĞILIMLARI

- ✓ Olasılığa ilişkin olayların çoğunluğunda, deneme sonuçlarının bir veya birkaç yönden incelenmesi söz konusudur. Bu incelemelerde, belirlenen bir değişken üzerinde gözlemler yapılır. Örneğin, şeker hastalarının kan şekeri ölçümünde, her hasta için kan şekeri miktarı farklı değerler alacağı için, buradaki kan şeker değeri ölçülebilir türden bir rassal değişken olacaktır. Yapılan ölçümlerin rastgele ve öngörülemeyen bir biçimde değişim göstermesi, rassal değişken kavramının tanımlanması ihtiyacını ortaya çıkarır. Çünkü gözlenen olaylarda, genellikle olasılık denemelerinin sonuçlarına ilişkin sayılarla, yani rassal değişkenlerin aldığı değerlerle ilgilenilir.
- ✓ Farklı kaynaklarda şans değişkeni, stokastik değişken ya da rastlantı değişkeni olarak da ifade edilen rassal değişkenin matematiksel tanımı şu şekilde ifade edilebilir:

- ✓ **X;** S örneklem uzayının elemanlarına ilişkin olarak tanımlanan gerçek değerli bir fonksiyon ise, bu X değişkenine **rassal değişken** adı verilir. Rassal değişkenleri diğer değişkenlerden ayıran özellik, almış olduğu değerleri belli bir olasılıkla almasıdır. Olasılık kuramında rassal değişkenler genellikle X, Y, Z, ... gibi büyük harflerle, değişkenin aldığı değerler ise x, y, z, ... gibi küçük harflerle belirtilir.

Örnek: Bir adet hilesiz bozuk paranın üç kez atılması denemesinde, X rassal değişkeni gelen yazı sayısı olduğuna göre, X rassal değişkeninin aldığı değerleri ve bu değerleri alması olasılıklarını belirtiniz.

Y harfi Yazı'yı, T harfi de Tura'yı göstersin. Örneklem uzayı;

S = {(Y,Y,Y) (Y,Y,T) (Y,T,Y) (T,Y,Y) (Y,T,T) (T,Y,T) (T,T,Y), (T,T,T)} olacaktır.

- Görüldüğü gibi X rassal değişkeninin alabileceği değerler 0, 1, 2 ve 3'tür.

✓ O yazı gelme olasılığı: $P(0) = (T,T,T) = \frac{1}{8}$

✓ 1 Yazı Gelme Olasılığı: $P(1) = (Y,T,T) + (T,Y,T) + (T,T,Y) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

✓ 2 Yazı Gelme Olasılığı: $P(2) = (Y,Y,T) + (Y,T,Y) + (T,Y,Y) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

✓ 3 yazı gelme olasılığı: $P(3) = (Y,Y,Y) = \frac{1}{8}$

Örnek: Hilesiz bir zarın atıldığında x şans değişkeni üst yüze gelen sayıyı ifade etmek üzere bu x şans değişkeninin olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

S = { x / 1,2,3,4,5,6 } $\quad\quad$ $P (X = x_i) = 1 / 6$

X	1	2	3	4	5	6
$P (X = x_i)$	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/6 & x = 1 \\ 1/6 & x = 2 \\ 1/6 & x = 3 \\ 1/6 & x = 4 \\ 1/6 & x = 5 \\ 1/6 & x = 6 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

İki farklı şekilde ifade edilen x şans değişkeninin dağılımına bakıldığında $P(X_i) \geq 0$ ve tüm x değerleri için $\sum P(X=x)= 1$ şartları sağlandığı görülmekte ve P(X=x) 'in bir olasılık fonksiyonu olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Kesikli Rassal Değişkenler İçin Olasılık Dağılımları

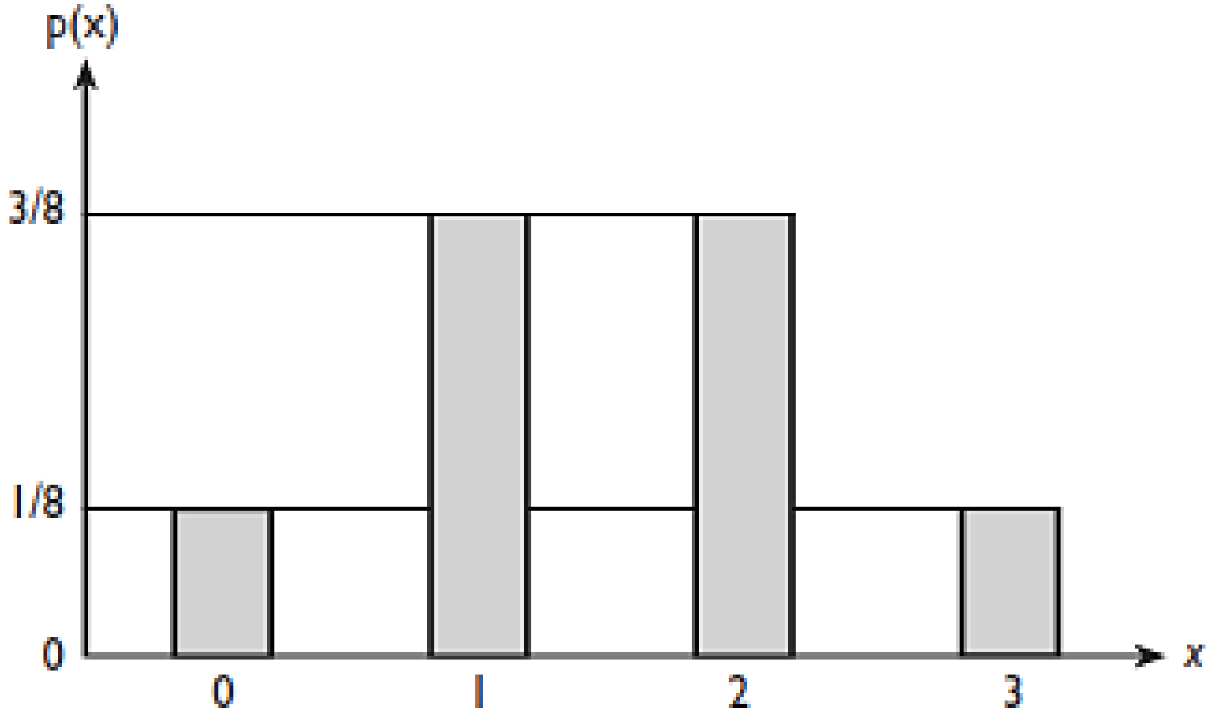
- ✓ Genelde, X rassal değişkeninin olası tüm değerlerine ilişkin olasılıkların tek tek gösterilmesi yerine, bu değerlerin hesaplanmasında kullanılacak genel eşitlik görevi üstlenen bir fonksiyon tanımlanır.
- ✓ Eğer X kesikli bir rassal değişken ise, X'in tüm olası x değerleri için tanımlanan $p(x) = P(X = x)$ fonksiyonu, X rassal değişkeninin olasılık dağılımı olarak tanımlanır.
- ✓ Bir p(x) fonksiyonunun, X kesikli rassal değişkeninin olasılık dağılımı olabilmesi için gerek ve yeter koşullar;

1) $0 \leq p(x) \leq 1$, tanım bölgesindeki her bir değer için
2) $\sum p(x) = 1$, tanım bölgesindeki tüm x değerleri için toplam alındığında

özellikleri sağlayan fonksiyonu, X kesikli rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu olarak da adlandırılır.

Örnek: Bir adet hilesiz bozuk paranın üç kez atılması denemesinde, X rassal değişkeni gelen yazı sayısı olduğuna göre, X rassal değişkeninin aldığı değerlerin olasılık fonksiyonu nedir?

- ✓ $P(0) = \frac{1}{8},\ P(1) = \frac{3}{8}, P(2) = \frac{3}{8},\ P(3) = \frac{1}{8}$



Hilesiz Bir Bozuk Paranın 3 Kez Atılması Denemesinde Gelen Yazı Sayısının Olasılık Dağılımı

Beklenen Değer

Bir şans değişkeninin herhangi bir olasılık fonksiyonunda almış olduğu tüm değerlerin ortalaması o şans değişkeninin beklenen değeridir.

X şans değişkeninin beklenen değeri;

$$E\ (x)$$

ile gösterilir.

- **Bir şans değişkenin beklenen değeri o şans değişkeninin ortalamasına eşittir.**

- **E (x) = µ**

49

Beklenen Değer Kullanarak Varyansın Elde Edilmesi

$E(x^2)$: x şans değişkeninin karesinin beklenen değeri

$$\mathrm{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\mathrm{Var}(x) = E(x-\mu)^2$$

Kesikli Şans Değişkenleri İçin Beklenen Değer ve Varyans

$$E(x) = \sum_{\text{Tümx}} x_i P(x_i)$$

$$E(x^2) = \sum_{\text{Tümx}} x_i^2 P(x_i)$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$Var(x) = \sum_{tüm\, x} x_i^2 P(x_i) - \left(\sum_{tüm\, x} x_i P(x_i) \right)^2$$

51

Örnek: Bir otomobil bayisinin günlük araba satışlarının dağılımının aşağıdaki gibi olduğunu ifade etmektedir.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0,02	0,08	0,15	0,19	0,24	0,17	0,10	0,04	0,01

Bu dağılışa göre bayinin;

a) 5 ten fazla araba satması olasılığını bulunuz

$P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}15$

b) Satışların beklenen değerini hesaplayıp yorumlayınız.

$E(X) = \sum xP(x_i) = (0)(0{,}02)+(1)(0{,}08)+(2)(0{,}15)+\ldots+(8)(0{,}01) = 3{,}72$

Bayinin 100 günde 372 araba satışı yapması beklenir.

c) Satışların varyansını bulunuz.

$E(X^2) = \sum x^2 P(x_i) = (0^2)(0{,}02)+(1^2)(0{,}08)+\ldots \ldots + (8^2)(0{,}01) = 16{,}68$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 16{,}68 - (3{,}72)^2 = 2{,}84$

BİNOM DAĞILIMI

Binom dağılımı, tüm denemelerin aynı koşullarda tekrarlandığı ve her tekrarda birbirinden bağımsız iki olay- dan birinin meydana geldiği denemelerde karşımıza çıkar. Değerleri sayma yoluyla elde edilen ve sonuçları başarılı-başarısız, var-yok, ölü-sağ, pozitif-negatif gibi ikili biçimde değer alan, nitel değişkenlere ilişkin bir dağılımdır.

BİNOM DAĞILIMI

n denemede x adet istenen durum ortaya çıkması olasılığını hesaplayabilmek için, Binom dağılımının olasılık fonksiyonu kullanılır. Buna göre, bir X rassal değişkeni Binom dağılımına sahip ise, bu değişken için olasılık fonksiyonu;

$$P(X=x) = {}_nC_x\, p^x\, (1-p)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,2, \ldots, n$$
$$= 0 \quad , \quad \text{diğer x değerleri için}$$

Örnek: Piyasaya yeni çıkan bir çikolata ürününü tüketen kişilerin %15'inde çikolata yedikten belli bir süre sonra kaşıntı oluşmaya başladığı gözlenmiştir.

A) Bu çikolatayı yiyen herhangi dört kişinin üçünde belli bir süre sonra kaşıntı oluşması olasılığı nedir?

Çözüm: n=4, x=3, p=0,15 ise;

$$P(X=3) = {}_4C_3\left(0{,}15\right)^3\left(0{,}85\right)^{4-3} = 4\cdot(0{,}15)^3\cdot(0{,}85) = 0{,}011475$$

B) Bu çikolatayı yiyen dört kişinin hiçbirinde belli bir süre sonra kaşıntı oluşmaması olasılığı nedir?

$$P(X=0) = {}_4C_0\left(0{,}15\right)^0\left(0{,}85\right)^{4-0} = 1\cdot1\cdot(0{,}85)^4 = 0{,}522006.$$

Binom Dağılımının Ortalaması ve Varyans

Bir X kesikli rassal değişkeni Binom dağılımına sahipse;

- ✓ Ortalaması: $\mu = n.p$
- ✓ Varyansı: $\sigma^2 = n.p.(1-p)$

Örnek: Mahalle marketinde satışa sunulan ve her birinin içinde altışar yumurta bulunan otuz kutu içerisindeki yumurtaların %10 oranında kusurlu (bozuk veya çatlamış) olduğu bilinmektedir. Seçilen herhangi bir kutudaki yumurtaların,

a) En fazla ikisinin kusurlu olması olasılığını ve

b) Bir kutudaki ortalama kusurlu yumurta sayısını, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Verilen olayın Binom denemesi midir?

- ✓ Her kutuda altışar yumurta bulunduğundan deneme sayısı 6, sabit bir değerdir.
- ✓ Kutudan seçilen herhangi bir yumurtanın kusurlu olması olasılığı ($p = 0{,}10$) tüm denemelerde sabittir.
- ✓ Kutulardaki kusurlu yumurta sa- yıları birbirlerinden bağımsızdır ve X rassal değişkeni, seçilen herhangi bir kutuda- ki kusurlu yumurta sayısını belirtir.

➢ **Bu nedenle bu bir binom denemesidir.**

Çözüm:

a) **Seçilen herhangi bir kutudaki yumurtaların en fazla ikisinin kusurlu olması olasılığı, seçilen kutuda hiç kusurlu yumurta olmaması, bir kusurlu yumurta olması ve iki kusurlu yumurta olması olasılıklarının toplamına eşittir.**

$$P(X=0) = {}_6C_0 (0,10)^0 (0,90)^{6-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0,90)^6 = 0,531441,$$

$$P(X=1) = {}_6C_1 (0,10)^1 (0,90)^{6-1} = 6 \cdot (0,10) \cdot (0,90)^5 = 0,354294,$$

$$P(X=2) = {}_6C_2 (0,10)^2 (0,90)^{6-2} = 15 \cdot (0,10)^2 \cdot (0,90)^4 = 0,098415$$

ve istenen olasılık;

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,531441 + 0,354294 + 0,098415 = 0,98415$$

b) **Bir kutudaki ortalama kusurlu yumurta sayısı Binom dağılımının ortalama formülü ile bulunabilir.**

- ✓ Ortalama Kusurlu yumurta: $\mu = n.p = 6.(0,10) = 0,6$
- ✓ Varyans: $\sigma^2 = n.p.(1-p) = 6.(0,10).(0,9) = 0,54$ ve standart Sapma: $\sigma = \sqrt{0,54} = 0,735$

Sürekli Şans Değişkenlerinin Olasılık Fonksiyonları

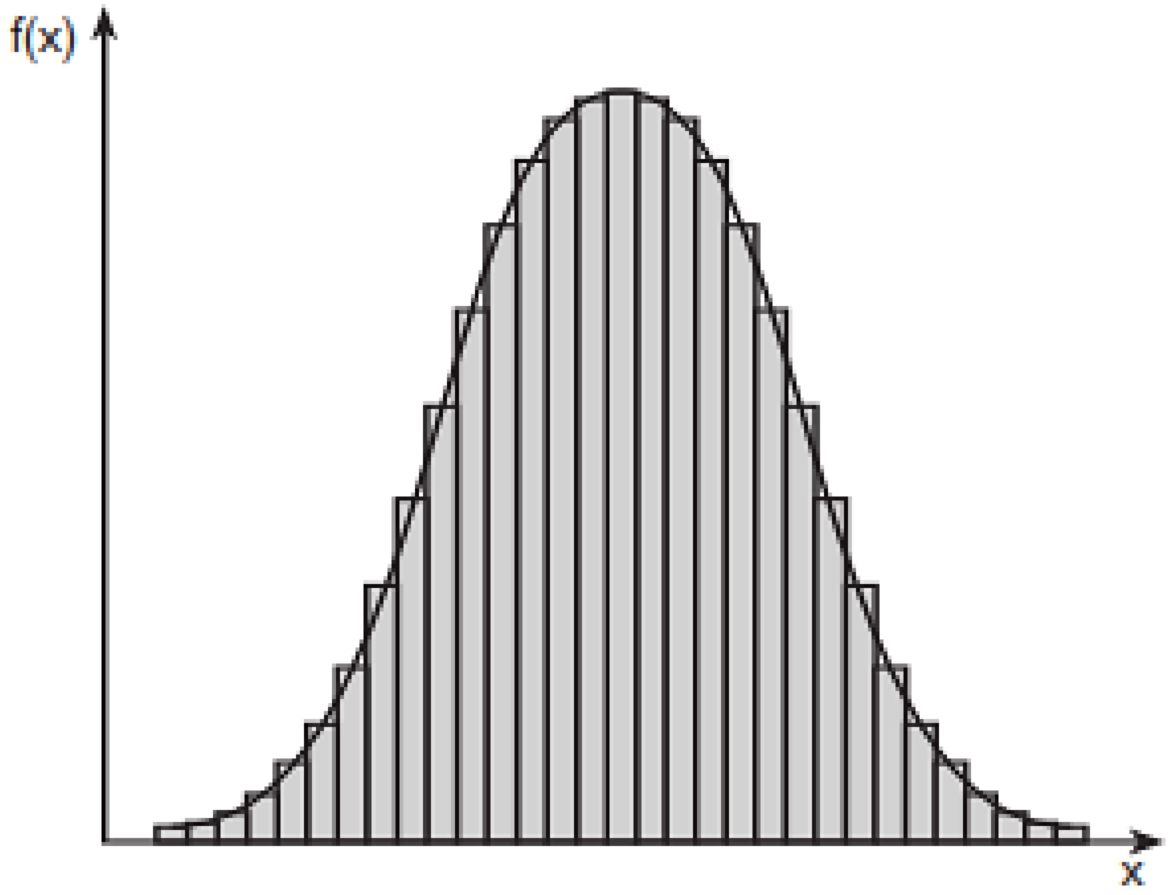
•Sürekli değişkenlerdeki olasılık fonksiyonuna sürekli olasılık fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, veya sadece yoğunluk fonksiyonu denir.

• Sürekli bir şans değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) ile gösterilir. Herhangi bir fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

1) X'in tanım aralığı için $f(x_i) \geq 0$,

2) $\int_{\text{tüm x}} f(x)dx = 1$ şartlarını sağlaması gereklidir.

Sürekli Bir Rassal (Şans) Değişkeni için Olasılık Dağılımı



Sürekli Şans Değişkenleri İçin Olasılık

- Sürekli bir değişkenin tanımlı olduğu aralıkta sonsuz sayıda değer vardır.

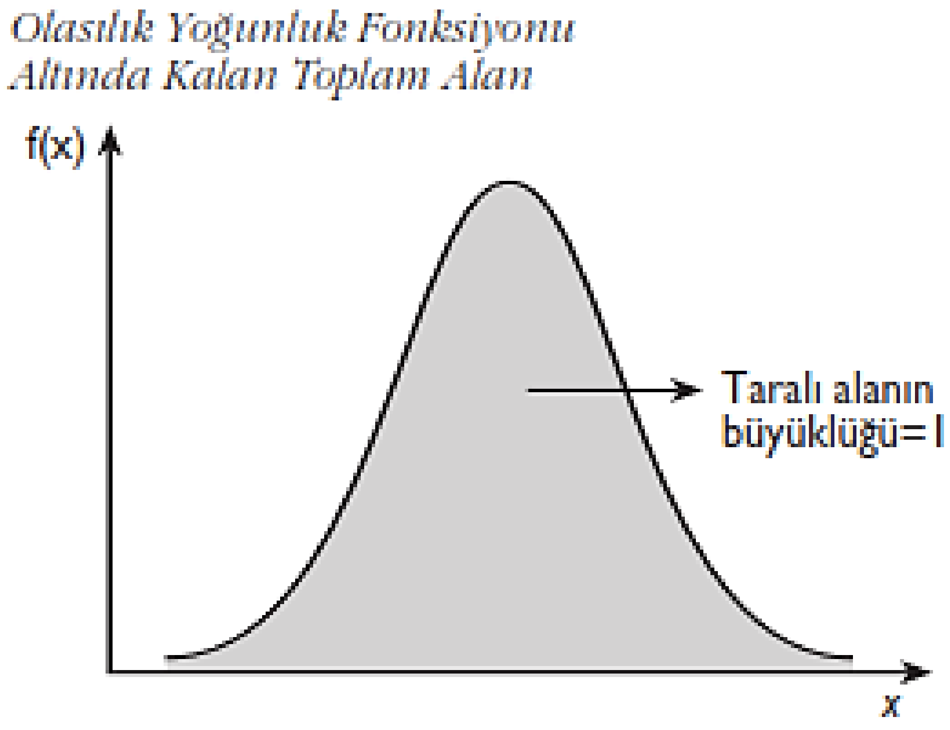
- Değişkenin bunlar içinden belirli bir değeri alma olasılığı $1/\infty = 0$ olur.

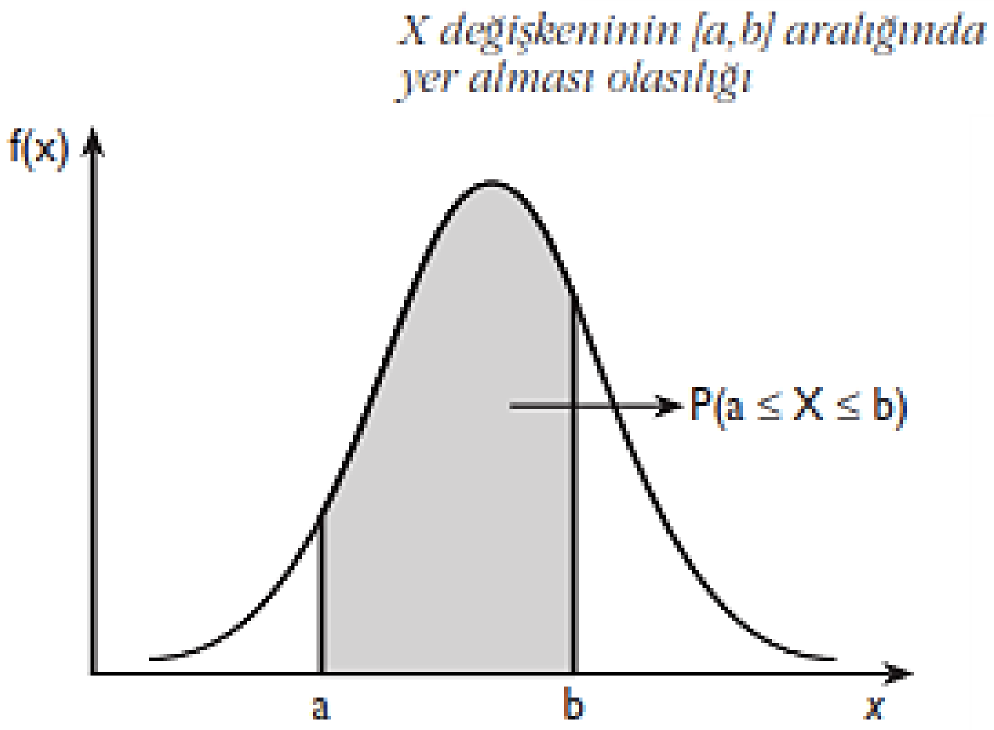
- Bu sebepten dolayı, sürekli değişkenlere ait olasılık fonksiyonları, kesikli değişkenlerin aksine bu değişkenin belirli bir değeri alma olasılıklarının hesaplanmasına imkan vermez.

- Bu fonksiyonlarda değişkenin belirli bir değer yerine belirli bir aralıkta değer alma olasılığının hesaplanması yoluna gidilir. Sürekli bir x şans değişkenin a ile b arasında olma olasılığı;

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde hesaplanır.


Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
Altında Kalan Toplam Alan
f(x)
Taralı alanın
büyüklüğü=1
x


X değişkeninin [a,b] aralığında
yer alması olasılığı
f(x)
P(a ≤ X ≤ b)
a
b
x

Örnek: f(x) fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor olsun

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \quad , & \text{diger x'ler icin} \end{cases}$$

a) f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

$\int_{\text{tüm}\,x} f(x)dx = 1$ ise f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$\int_1^2 \frac{3}{7}x^2 dx = \frac{x^3}{7}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} = 1$$

olduğundan f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) P (1,5 < x < 1,8) = ?

$$P(1{,}5 < x < 1{,}8) = \int_{1,5}^{1,8} \frac{3}{7}x^2 dx = \frac{x^3}{7}\Bigg|_{1,5}^{1,8} = \frac{1{,}8}{7} - \frac{1{,}5}{7} \approx 0{,}04$$

55

Sürekli Şans Değişkenleri İçin Beklenen Değer ve Varyans

$$E(x) = \int_{\text{tümx}} x \ f(x) dx$$

$$E\left(x^2\right) = \int x^2 f\left(x\right) dx$$

$$Var(x) = \int_{tüm\ \text{x}} x^2 f(x) dx - \left(\int_{tüm\ \text{x}} x f(x) dx \right)^2$$

56

Normal Dağılım

•Sürekli ve kesikli şans değişkenlerinin dağılımları birlikte ele alındığında istatistikte en önemli dağılım **Normal dağılımdır**.

•Normal dağılım ilk olarak **1733'te Moivre** tarafından p başarı olasılığı değişmemek koşulu ile binom dağılımının limit şekli olarak elde edilmiştir. **1774'te Laplace** hipergeometrik dağılımını limit şekli olarak elde ettikten sonra **19. yüzyılın ilk yıllarında Gauss** 'un katkılarıyla da normal dağılım istatistikte yerini almıştır.

- Normal dağılımın ilk uygulamaları doğada gerçekleşen olaylara karşı başarılı bir biçimde uyum göstermiştir. Dağılımın göstermiş olduğu bu uygunluk adının Normal Dağılım olması sonucunu doğurmuştur.

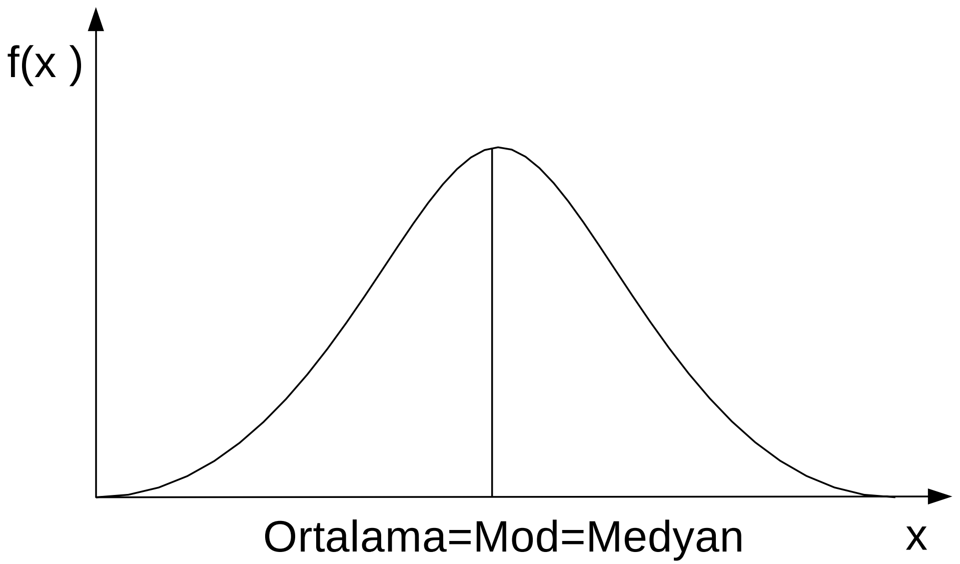
- İstatistiksel yorumlamanın temelini oluşturan Normal Dağılım, bir çok rassal süreçlerin dağılımı olarak karşımıza çıkmaktadır.

- Normal dağılış kullanımının en önemli nedenlerinden biride bazı varsayımların gerçekleşmesi halinde kesikli ve sürekli bir çok şans değişkeninin dağılımının normal dağılışa yaklaşım göstermesidir.

Normal Dağılımın Özellikleri

- Çan eğrisi şeklindedir.
- Simetrik bir dağılıştır.
- Normal Dağılımın parametreleri,

$$E(x) = \mu \qquad\qquad Var(x) = \sigma^2$$



10

Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , -\infty < x < \infty \\ 0 & , diger \quad yerlerde \end{cases}$$

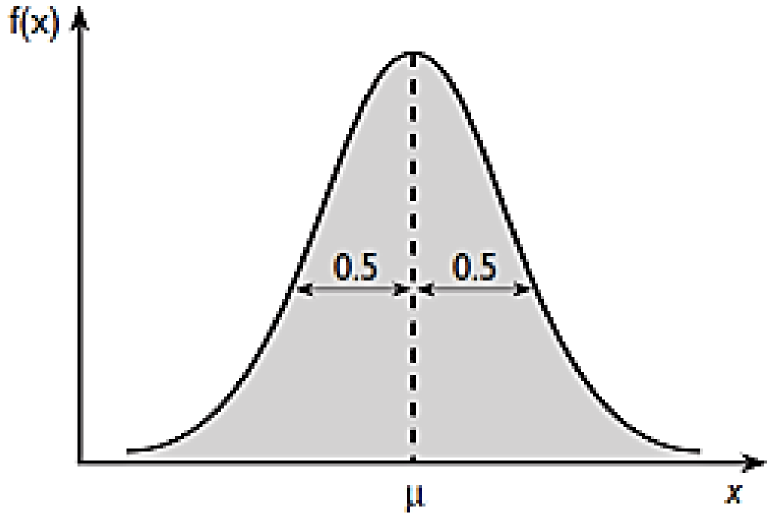
$\pi = 3{,}14159...$

e = 2,71828

σ = populasyon standart sapması

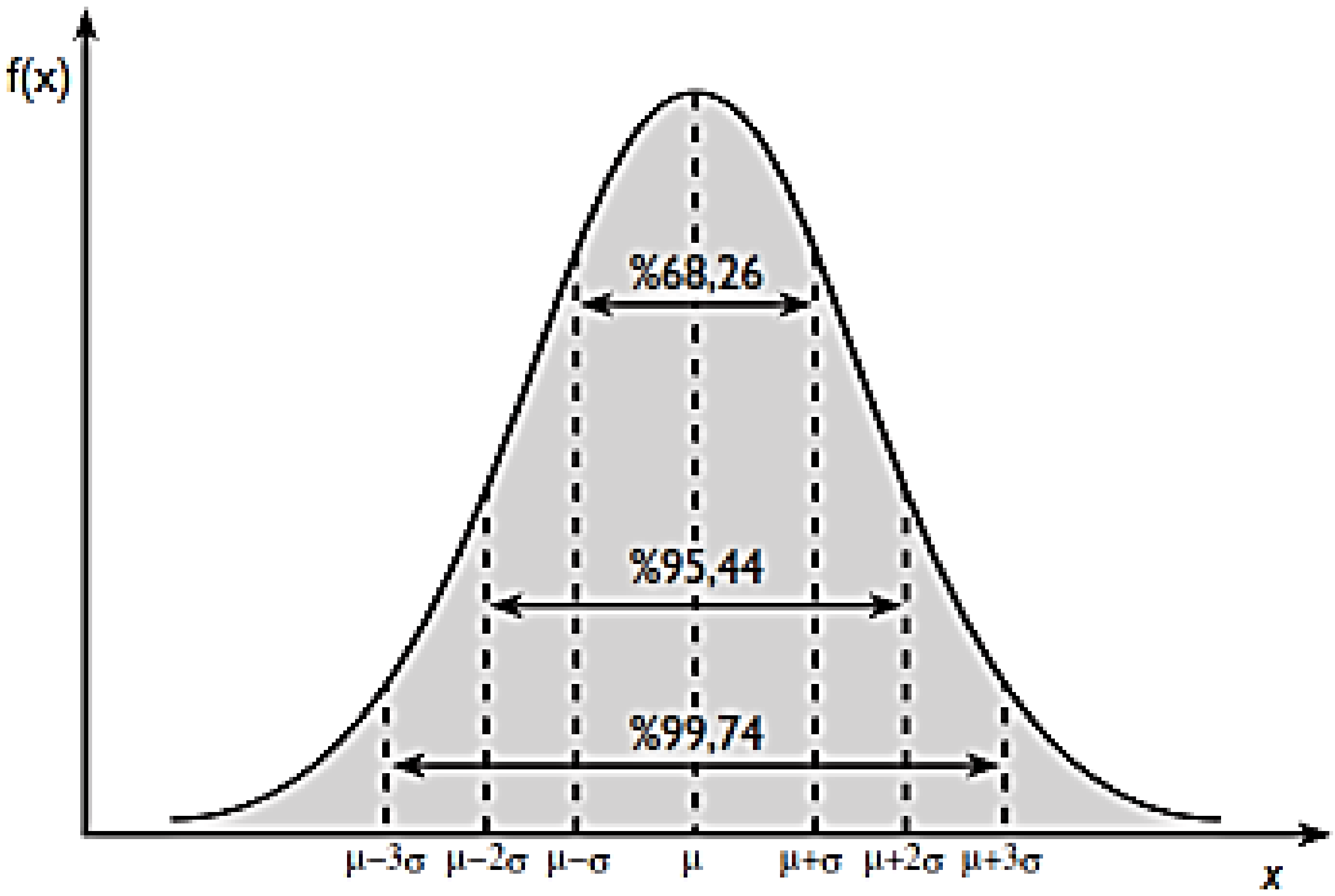
μ = populasyon ortalaması

Normal Dağılım Eğrisinin Altında Kalan Alanın İkiye Bölünüşü



Aritmetik ortalaması ve standart sapması belli bir normal da dağılımda μ ve σ değerleri arasında değişmez ilişkiler vardır

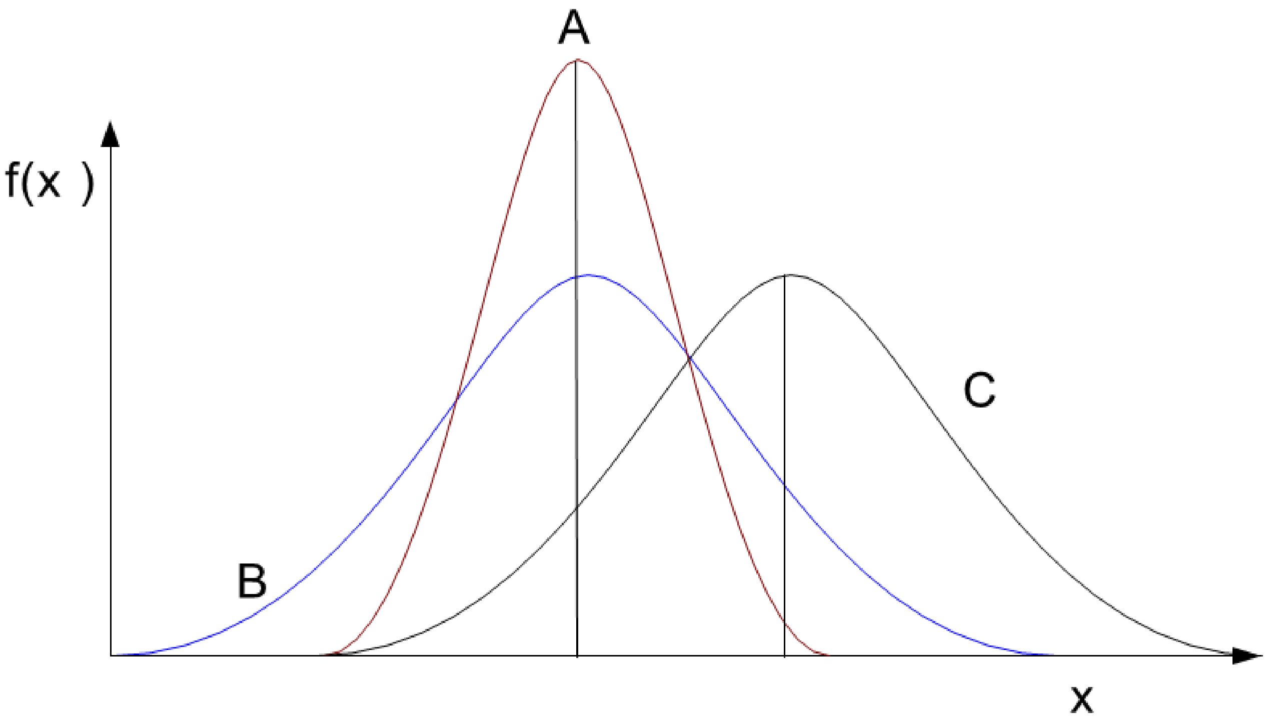
Aritmetik Ortalama	Standart Sapma		Kapladığı Alan
μ	±	σ	0,3413+0,3413 = 0,6826
μ	±	2 σ	0,4772+0,4772 = 0,9544
μ	±	3 σ	0,4987+0,4987 = 0,9974
μ	±	1.96 σ	0,4750+0,4750 = 0,095
μ	±	2.58 σ	0,4950+0,4950 = 0,99



Normal Dağılımda Aritmetik Ortalamadan ±σ'dan ±3σ 'ya Kadar Uzaklaşıldığında Elde Edilen Alan Miktarları

- Normal dağılım ortalama ve standart sapma parametrelerinin değişimi sonucu birbirinden farklı yapılar gösterir.

- ✓ Her dağılımın için olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanarak olasılık hesaplama güçlüğü, olasılık değerlerini içeren tabloları zorunlu kılmıştır.
- ✓ Birbirinden farklı sonsuz sayıda normal dağılış olabileceği için olasılı hesaplamasında kullanmak üzere sonsuz sayıda tablo gereklidir.



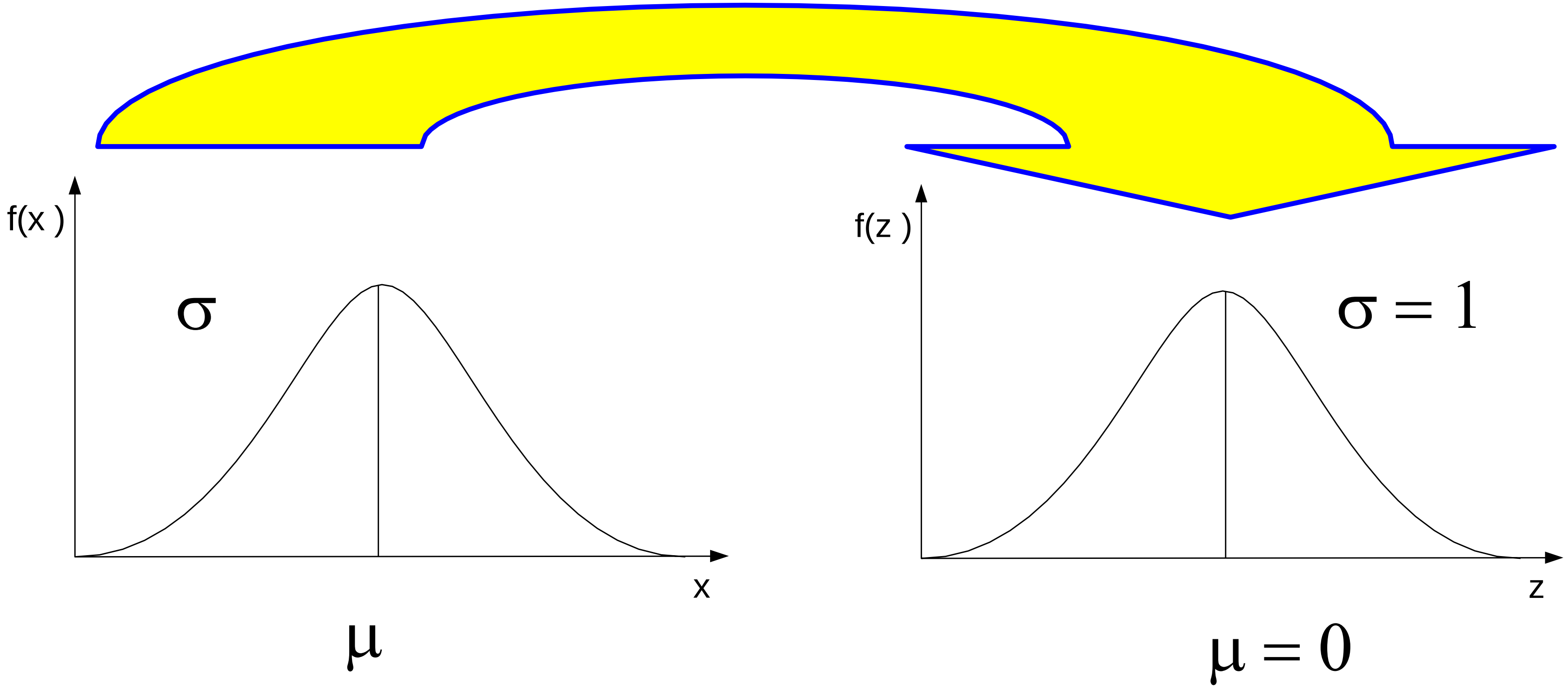
Standart Normal Dağılım

- Olasılık hesaplamasındaki zorluktan dolayı normal dağılış gösteren şans değişkeni standart normal dönüştürülür.
- Böylece tek bir olasılık tablosu kullanarak normal dağılış ile ilgili olasılık hesaplamaları yapılmış olur.
- Standart normal dağılımda ortalama 0 , varyans ise 1 değerini alır.
- Standart normal değişken z ile gösterilir.

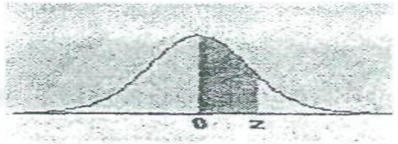
Standart Normal Şans Değişkeni

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- X ~ N (μ , σ^2)
- Z ~ N (0 , 1)



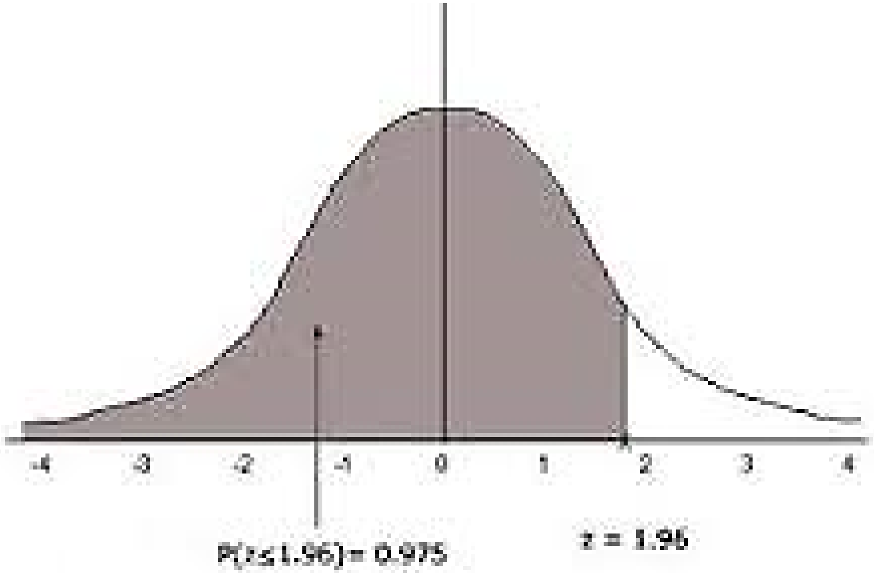
Standart Normal Dağılım (Z) Tablosu



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

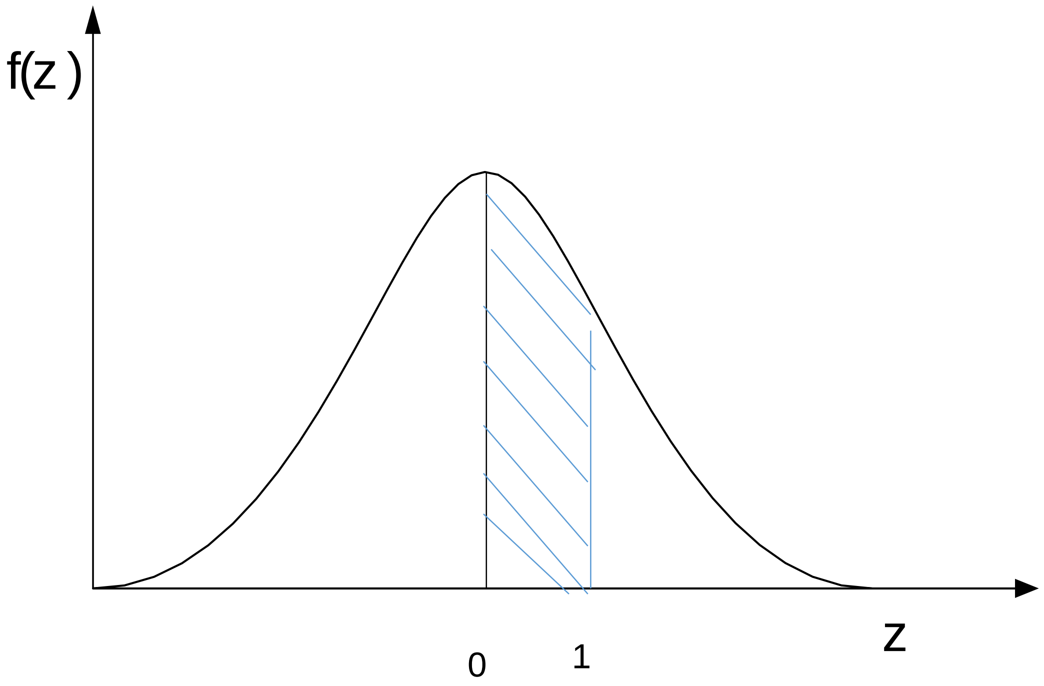
STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670



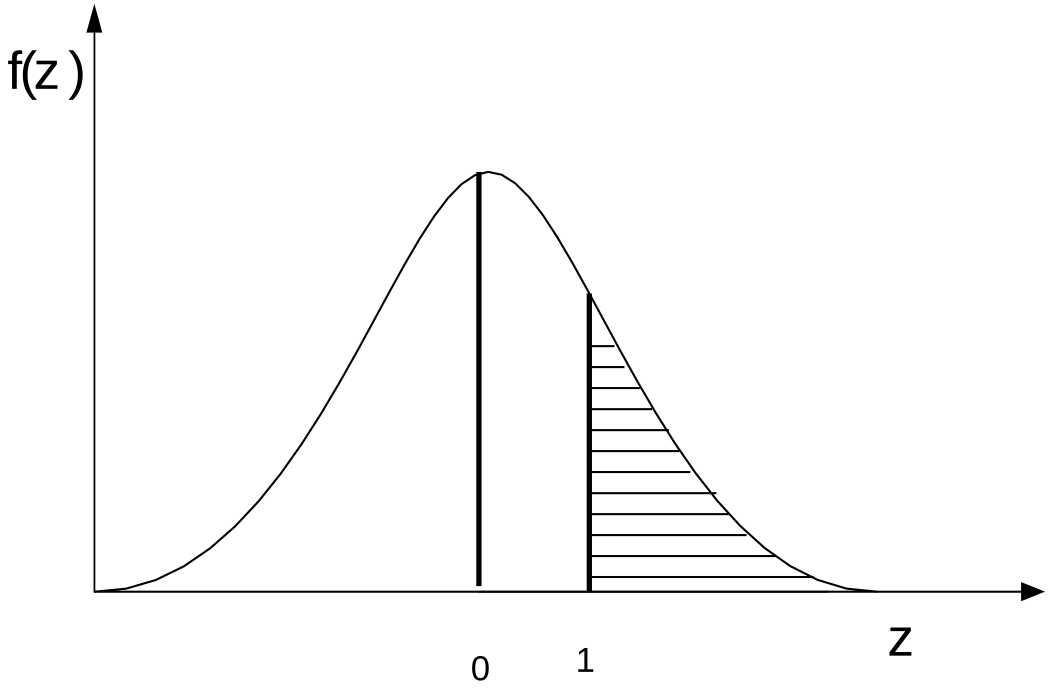
Standart Normal Dağılım Tablosunu Kullanarak Olasılık Hesaplama

$$P(0 < z < 1) = ?$$



$$P(0 < z < 1) = 0,3413$$

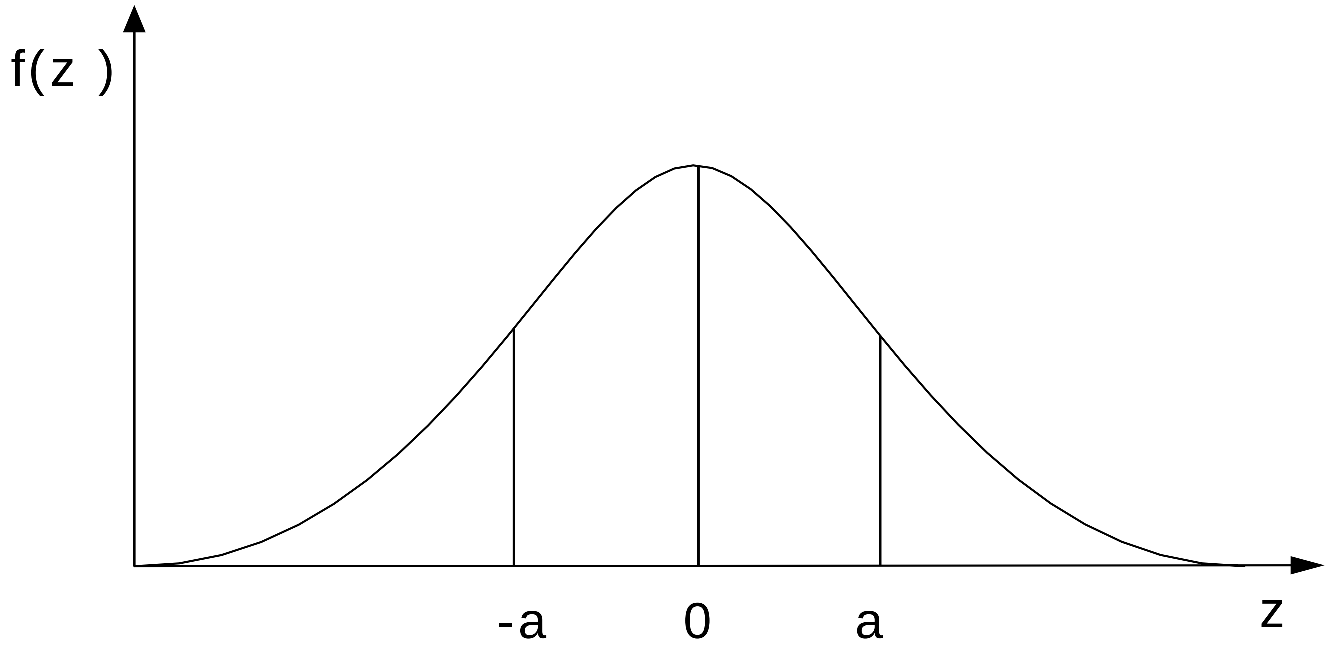
$$P(z > 1) = ?$$



$$0{,}5 - P(0 < z < 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

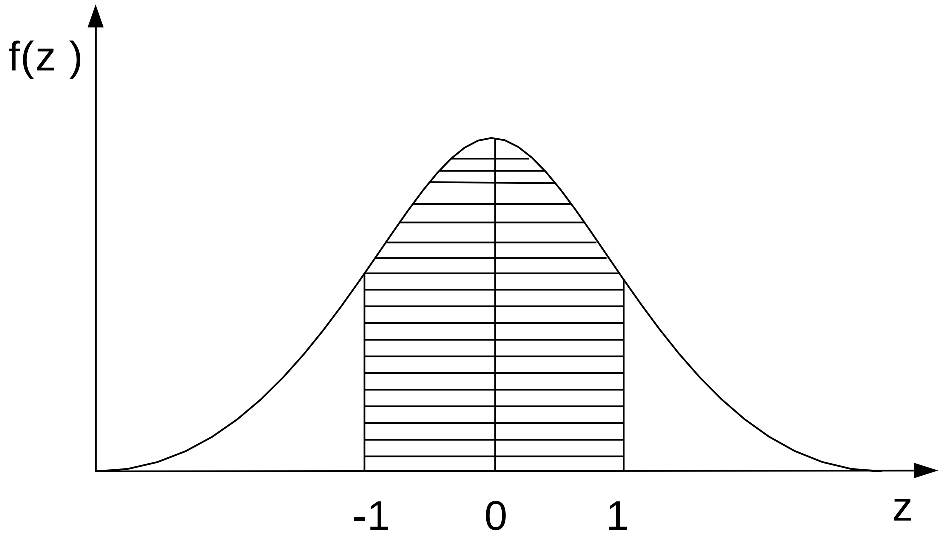
SİMETRİKLİK ÖZELLİĞİNDEN DOLAYI 0'DAN EŞİT UZAKLIKTAKİ Z DEĞERLERİNİN 0 İLE ARASINDAKİ KALAN ALANLARININ DEĞERLERİ BİRBİRİNE EŞİTTİR.

$$P(0 < z < a) = P(-a < z < 0)$$



20

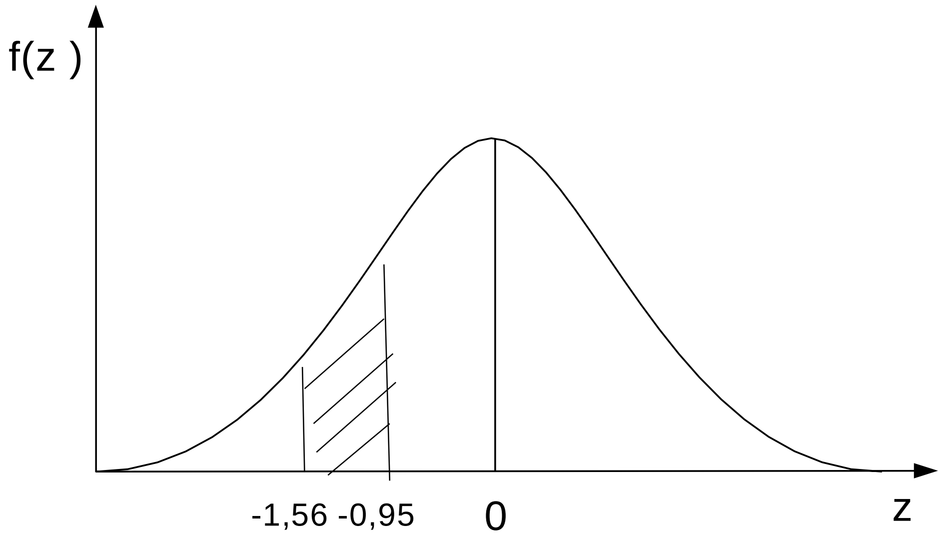
$$P(-1 < z < 1) = ?$$



$$P(-1 < z < 1) = P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1)$$

$$= 2 * P(0 < z < 1) = 2(0,3413) = 0,6826$$

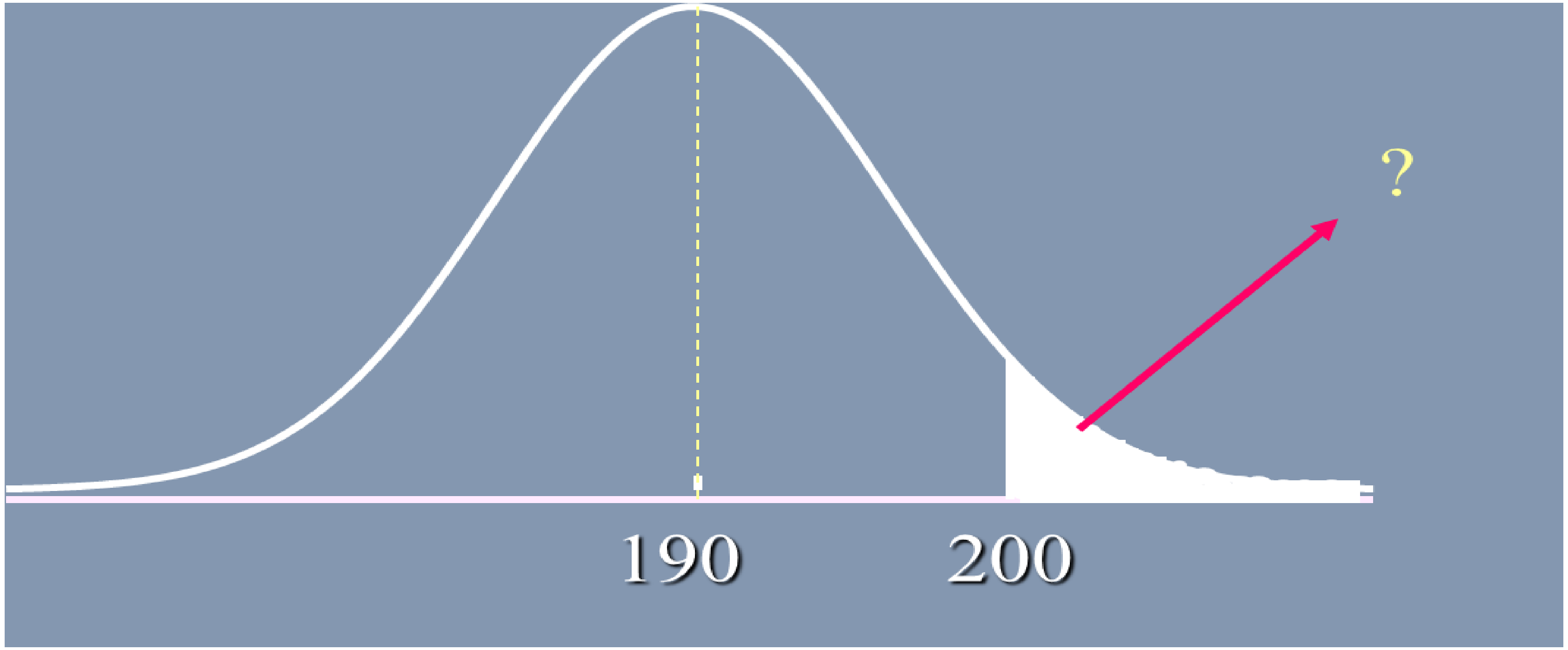
$$P(-1{,}56 < z < -0{,}95) = ?$$



$$P(-1{,}56 < z < -0{,}95) = P(-1{,}56 < z < 0) - P(-0{,}56 < z < 0)$$

$$= 0{,}4406 - 0{,}3289 = 0{,}1117$$

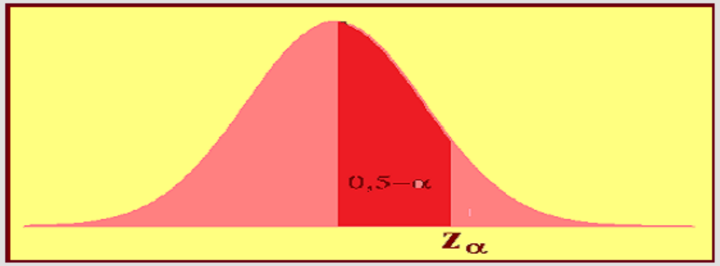
Örnek: 10000 yetişkin üzerinde yapılan kolesterol tarama testi sonucunda kolesterol değerlerinin 190 ortalama ve 50 standart sapma ile normal dağıldığı görülmüştür. Kolesterol normal sınırlarının 150-200 olduğu bilindiğine göre kaç kişinin kolesterolü yüksektir?



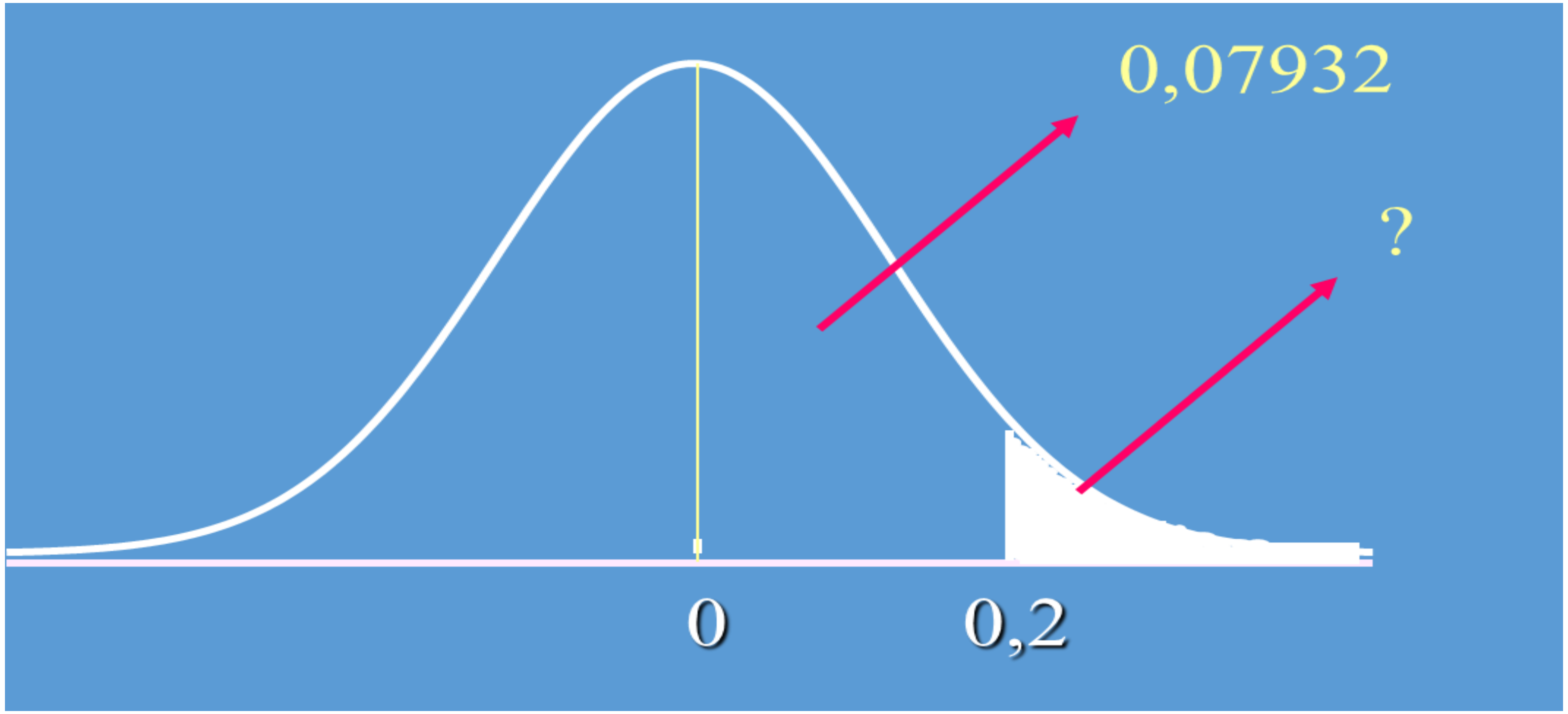
Çözüm: Standart Normal Dağılım yaklaşımınına çevirmek için:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ eşitliğini kullanarak $$z_{200} = \frac{200-190}{50} = 0.2$$

Standart Normal Dağılım Tablosu kullanarak z=0,2 değerine karşılık gelen olasılık değeri:



z	0.00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,2	0,07932	0,0832	0,0871	...	...	...	...	...	...	...
1,6	0,4452	0,4461	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0.4750	0,4756	0,4761	0,4747
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



$$P(x > 200) = P(z > 0.2) = 0,5 - 0,07932 = 0,42068$$

Yetişkinlerin %42'sinin kolesterolü yüksektir. Çalışma 10000 kişi üzerinde yapıldığından 0,42068 * 10000 = 4207 kişinin kolesterolü yüksektir.

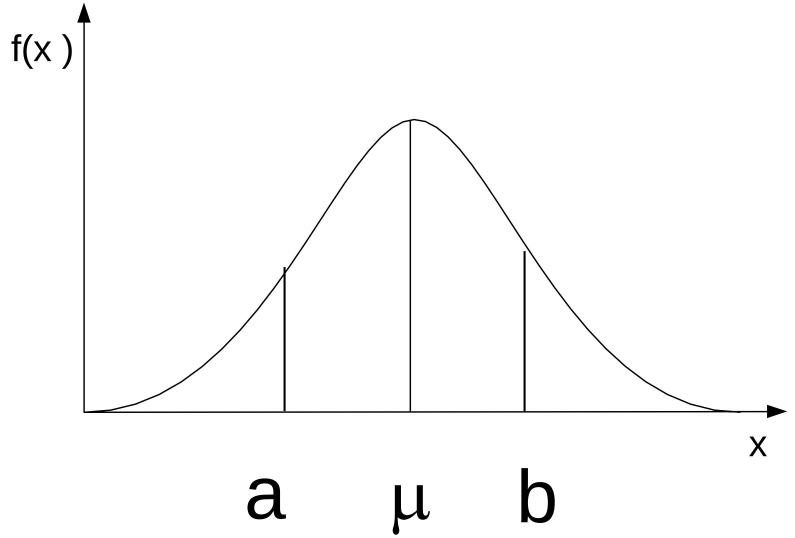
Normal Dağılımın Standart Normal Dağılım Dönüşümü

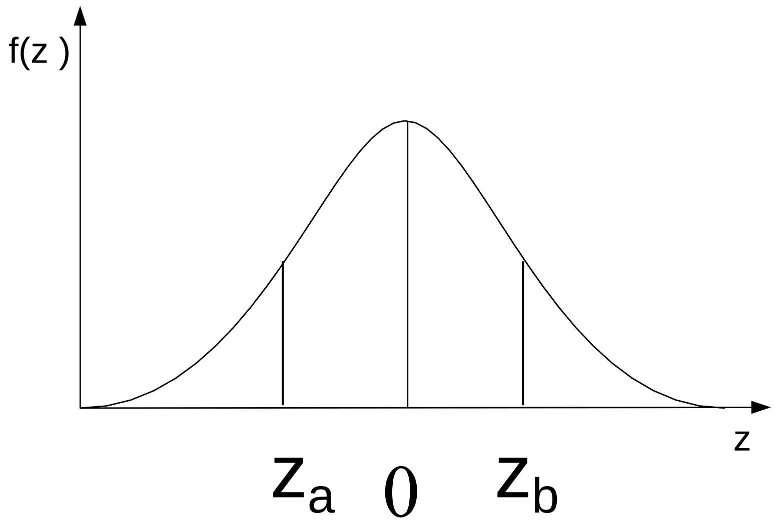
$$P(a < X < b) = ?$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $Z \sim N(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(z_a < z < z_b)$$

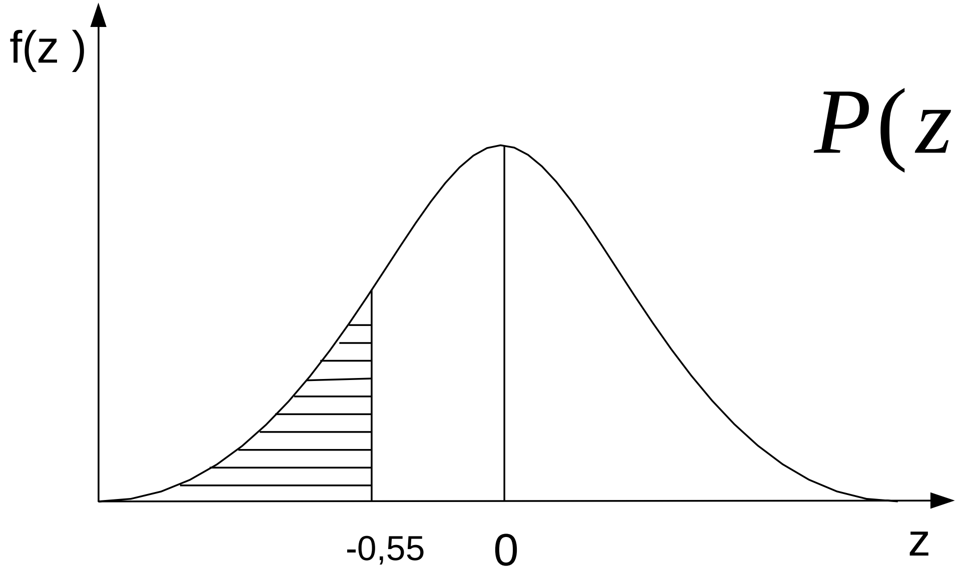




Örnek: Bir işletmede üretilen vidaların çaplarının uzunluğunun, ortalaması 10 mm ve standart sapması 2mm olan normal dağılıma uygun olduğu bilinmektedir. Buna göre rastgele seçilmiş bir vidanın uzunluğunun 8.9 mm’den az olmasının olasılığını hesaplayınız

$$P(X < 8{,}9) = ? \qquad X \sim N(10, 4)$$

$$P(X < 8{,}9) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{8{,}9-10}{2}\right) = P(z < -0{,}55)$$



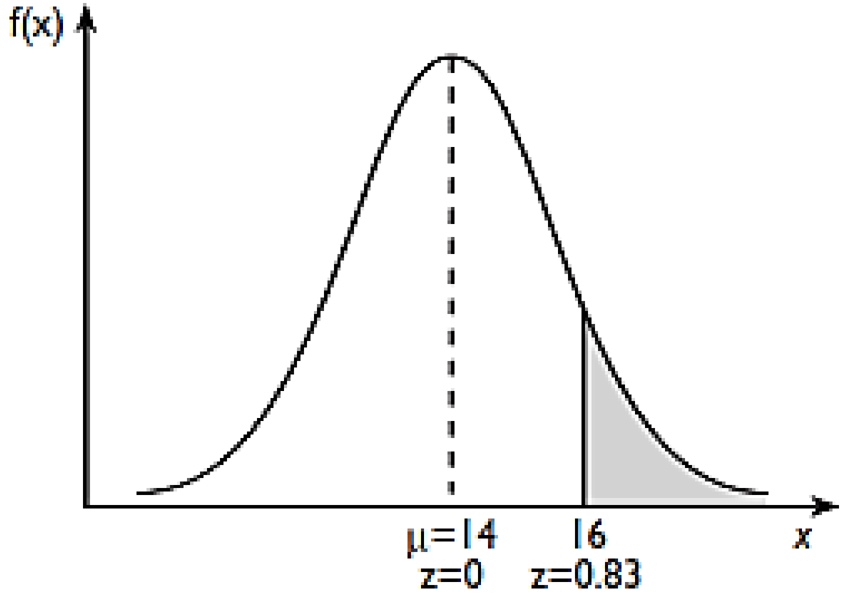
$$P(z < -0{,}55) = 0{,}5 - 0{,}2088$$
$$= 0{,}2912$$

Örnek: Bir çiftlikte 200 adet büyükbaş hayvan bulunmaktadır. Bu hayvanlardan elde edilen günlük ortalama süt üretimi miktarının, μ = 14 kg. ve standart sapmasının σ= 2,4 kg. ile normal dağılıma uyduğu bilinmektedir.

a) Günlük süt üretimi 16 kg.'dan fazla olan hayvan oranı ve sayısını bulunuz.
b) Günlük süt üretimi 10 ile 17 kg. arasında olan hayvan oranı ve sayısını elde ediniz.
c) Günlük süt üretimi 9 ile 11 kg. arasında olan hayvan oranı ve sayısını he- saplayınız.

Çözüm:

P(X > 16) Olasılığı



A) $z = \frac{a-\mu}{\sigma} = \frac{16-14}{2.4} = 0.83$

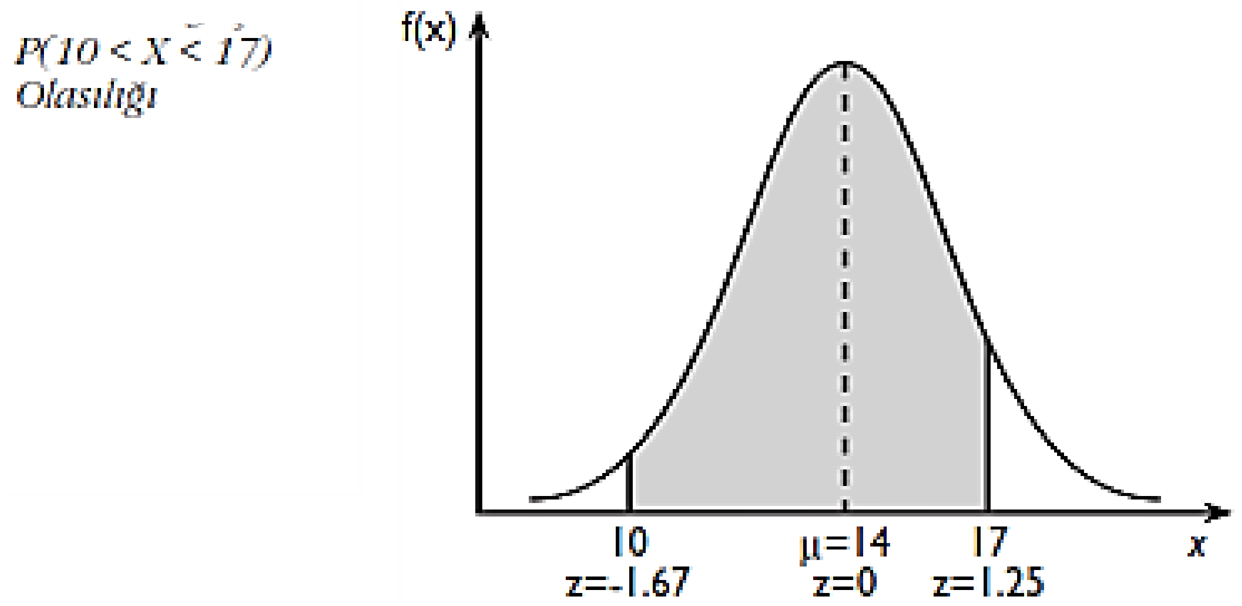
$$P(X > 16) = P(Z > 0,83) = 0,5 - P(0 < Z < 0,83) = 0,5 - 0,2967 = 0,2033$$

Çözüm b) Günlük süt üretimi 10 ile 17 kg. arasında olan hayvan oranını bulabilmek için bu değerlere karşılık gelen iki tane z değeri hesaplamak gerekir.

$$z_{alt} = \frac{10 - 14}{2,4} = -1,67 \; ve \; z_{üst} = \frac{17 - 14}{2,4} = 1,25$$

P(12 < X < 17) = P(-1, 67 < Z < 1, 25) = P(0 < Z < 1, 67) + P(0 < Z < 1, 25)

Buna göre, günlük süt üretimi 10 ile 17 kg. arasında olan hayvan oranı % 84,69 ve sayısı: 200 · (0,8469) ≅ 169 olarak hesaplanır.



Çözüm c) Günlük süt üretimi 9 ile 11 kg. arasında olan hayvan oranı ve sayısı;

$$z_{alt} = \frac{9 - 14}{2,4} = -2,08 \; ve \; z_{üst} = \frac{11 - 14}{2,4} = -1,25$$

P(9 < X < 11) = P(-2, 08 < Z < -1, 25) = P(0 < Z < 2, 08) - P(0 < Z < 1, 25)
= 0, 4812 - 0, 3944 = **0, 0868**

Buna göre, günlük süt üretimi 9 ile 11 kg. arasında olan; hayvan oranı % 8,68 ve sayısı: 200 · (0,0868) ≅ 17 olur.