

# HİPOTEZ TESTLERİ

Yrd. Doç. Dr. Emre ATILGAN

# Hipotez Nedir?

- **HİPOTEZ:** parametre hakkındaki bir inanıştır. Parametre hakkındaki inancı test etmek için hipotez testi yapılır.
- Hipotez testleri sayesinde örneklemden elde edilen istatistikler aracılığıyla anakütle parametreleri hakkında karar verilir.
- Anakütle parametreleri hakkında karar verirken doğru ya da yanlış olması muhtemel yargılardan hareket edilir.
- **İstatistiksel hipotez:** bir ya da daha fazla ana kütleyle ilişkin olarak ileri sürülen ve teorik bir dağılım varsayımı altında, parametrik değerin belirli bir değere eşit olduğunu veya iki ya da daha fazla ana kütle parametresinin birbirlerine eşit olduğunu belirten ve geçerliliği istatistiksel testlerle denetlenen bir önermedir.

**Ör:** «Bu sınıfın not ortalamasının 70 olduğuna inanıyorum.»

# Hipotez Testi Nedir?

$$\bar{X} - \mu = Hata$$



İstatistiksel hipotez testleri ortaya çıkan bu hataların/farkların tesadüfi mi, önemli mi veya anlamlı mu olduğunu ortaya koyan bir süreçtir

# Hipotez Testi Aşamaları

1.  $H_0$  Hipotezinin Belirlenmesi ve Formüle edilmesi:
2.  $H_1$  Seçenek Hipotezinin Belirlenmesi ve Formüle edilmesi:
3. I. Tip hatanın olasılığı olan  $\alpha$ 'nın belirlenmesi
4. Hipotezler için uygun test veya test istatistiğinin belirlenmesi
5. Belirlenen I. Tip hataya Bağlı Olarak  $H_0$  Hipotezi için Kabul ve Red Bölgelerinin Saptanması
6. İstatistiksel Karar

# $H_0$ Hipotezinin Belirlenmesi

- İstatistiksel hipotez testlerinde, test edilecek olan hipotezi ifade eder.
- Sıfır hipotezleri genellikle ispatlanmak istenenin tam tersini belirtecek şekilde kurulur.

**Ör:** Sınıfın not ortalaması 50'dir. (Test amacımız sınıf ortalamasının 50'den farklı olduğunu ortaya koymaktır)

$$H_0: \mu = 50$$

**Ör:** Kolesterolü normal kitlenin ortalaması 180'dir. (Amacımız örneklem değerleri ile bulunan kolestrol otalama değerinin 180'den farklı olduğunu ortaya koymaktır)

$$H_0: \mu = 180$$

- ✓ Sıfır hipotezleri genellikle ispatlanmak istenenin tam tersini belirtecek şekilde kurulur.

# $H_1$ Seçenek Hipotezinin Belirlenmesi

- Eşit olmama, farklılık, belirli bir değerden daha büyük olma, belirli bir değerden daha küçük olma, parametreler arasındaki farkın sıfır olmadığı gibi kavramları ileri süren bir istatistiksel hipotezdir
- Alternatif/karşıt hipotez  $H_1$  ile gösterilir.
- İstatistiksel hipotez testlerinde karşıt hipotezler, test edilecek olan sıfır hipotezinin tersi olan iddia öne sürülerek oluşturulur ve genellikle ispatlanmak istenen durum bu hipotezde belirtilir.

- ✓ Tek ana kütle parametresinin belli bir değere eşit olup olmadığına ilişkin hipotez testleri:

$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: P = P_0$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: P \neq P_0$
$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: P > P_0$
$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: P < P_0$

- ✓ İki ana kütleye ait parametrelerin birbirlerine eşit olup olmadığına ilişkin hipotez Testleri:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: P_1 = P_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: P_1 \neq P_2$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: P_1 > P_2$
$H_1: \mu_1 < \mu_2$	$H_1: P_1 < P_2$

# I. Tip hatanın olasılığı olan $\alpha$ 'nın belirlenmesi

- İstatistiksel hipotez testlerinin tümü  $H_0$  hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında gerçekleştirilir.
- Araştırmacı, çalışmasına başlamadan önce tip I hata olasılığı için belirli bir değer öngörür. Bu değer alfa ( $\alpha$ ) değeri ile gösterilir ve genellikle 0.05 veya 0.01 gibi küçük değerler olarak alınır.
- Diyelim ki, çalışmamızın başında tip I hata olasılığını  $\alpha=0.05$  olarak öngördük. Bunun anlamı  $H_0$  gerçekte doğru iken onu yanlışlıkla red etme olasılığımız maksimum %5 olmalı.
- İstatistiksel paket programları, bir hipotez testi sonucunda gerçekleşen I. tip hata miktarını hesaplar ve bu değere **p değeri** denir. P değeri önceden belirlenmiş  $\alpha$  değeri ile karşılaştırılarak karar verilir.
- **$P \leq \alpha$**  ise  $H_0$  red edilir. Bunun anlamı,  $H_0$ 'ı red etmekle gerçekleşen yanılğı **öngörülenden küçüktür**. Dolayısıyla rahatlıkla  $H_0$  red edilebilir.
- **$P > \alpha$**  ise  $H_0$  kabul edilir. Bunun anlamı gerçekleşen yanılğı öngörülenden küçük olmadığı için  $H_0$  red edilemez.

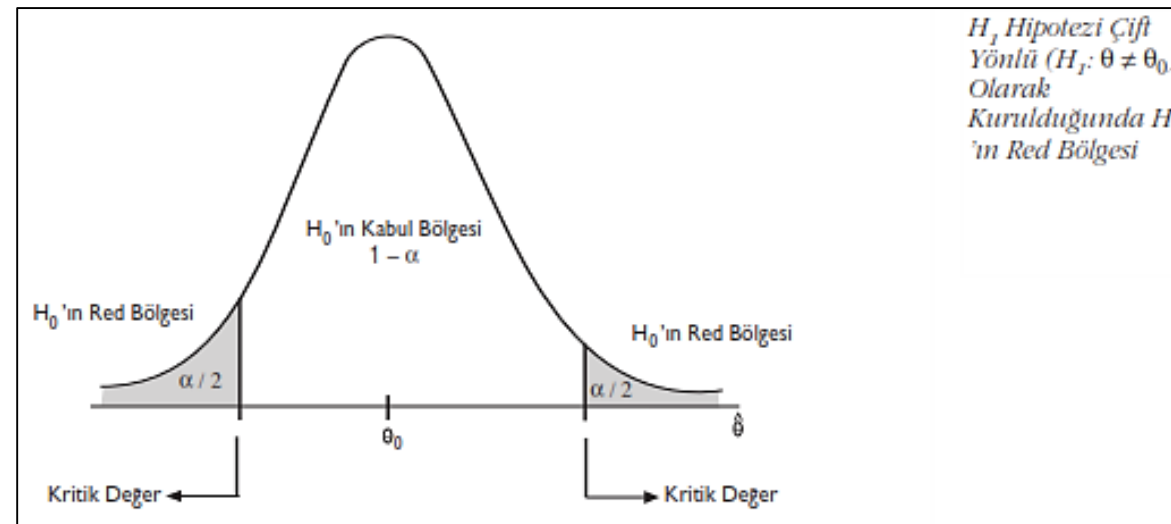
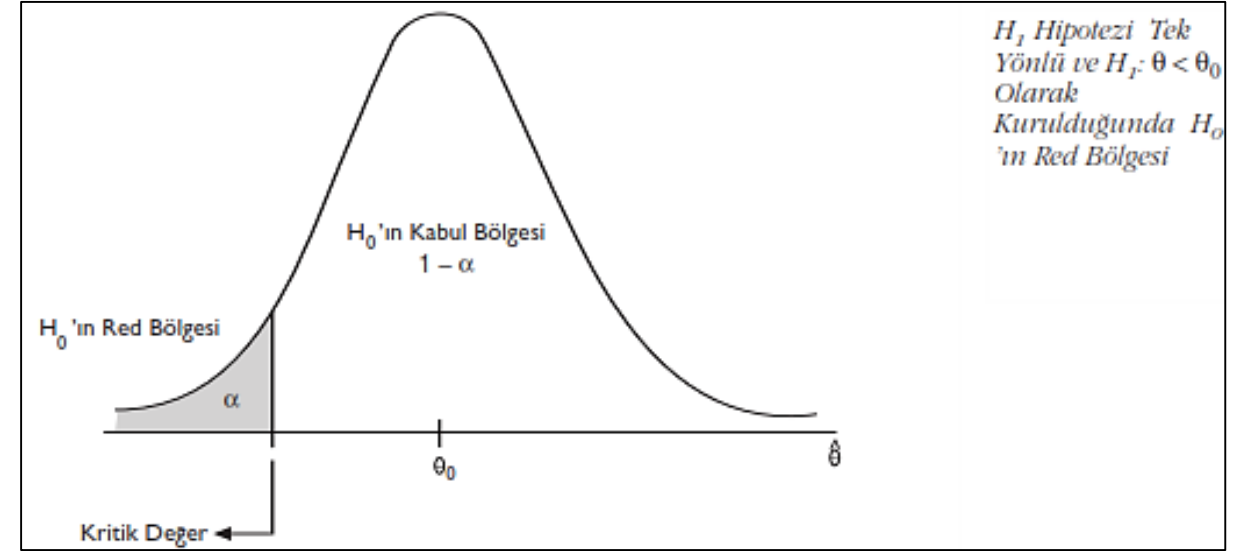
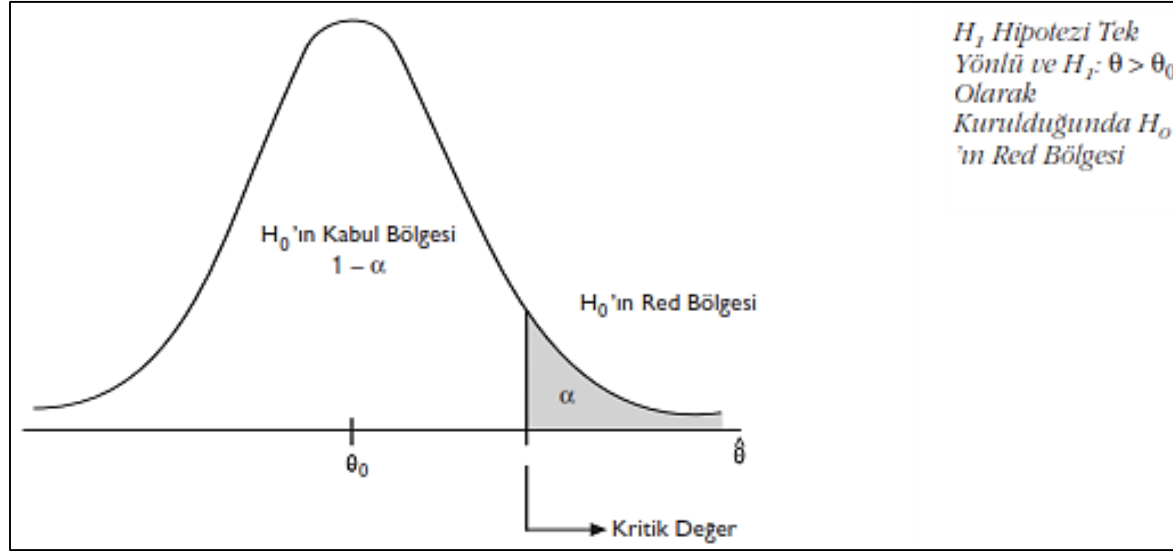


# Hipotez Testi Hataları

		Hipotez testi sonucunda verilen karar	
		$H_0$ kabul edildi	$H_0$ Reddedildi
Gerçek	$H_0$ doğru	Doğru karar ( $1-\alpha$ ) $\rightarrow$ Güven düzeyi	I. Tip Hata ( $\alpha$ ) $\rightarrow$ $\alpha$ hatası
	$H_0$ yanlış	II. Tip Hata ( $\beta$ )	Doğru Karar ( $1-\beta$ ) $\rightarrow$ Testin Gücü

❖  $\alpha$  ve  $\beta$  ters ilişkilidir. Her iki hatayı aynı anda azaltamayız.

# $H_0$ Hipotezi için «RED» Bölgeleri

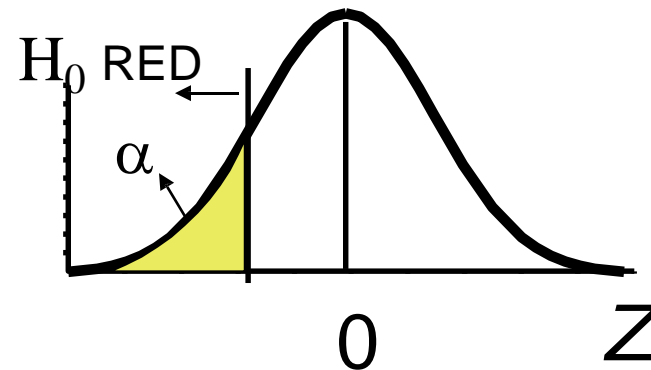
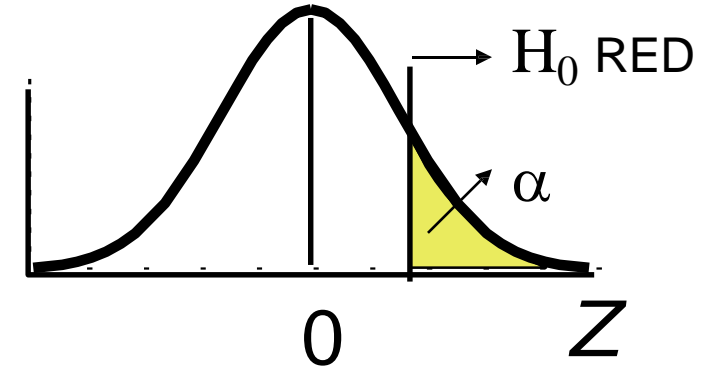
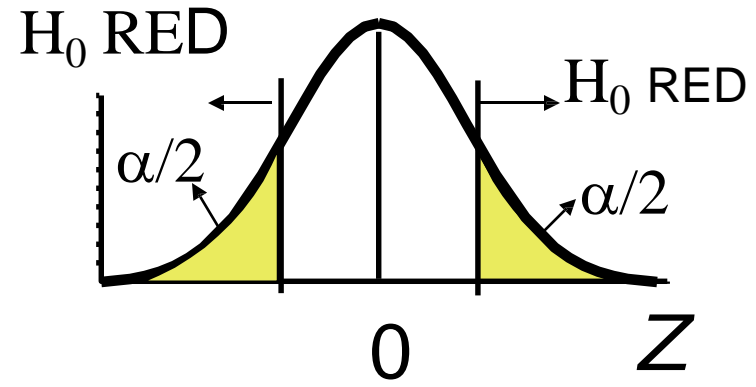


## Hipotez Çiftleri:

$H_0 : \mu = \mu_0$   
 $H_1 : \mu \neq \mu_0$  } ÇİFT TARAFLI TEST

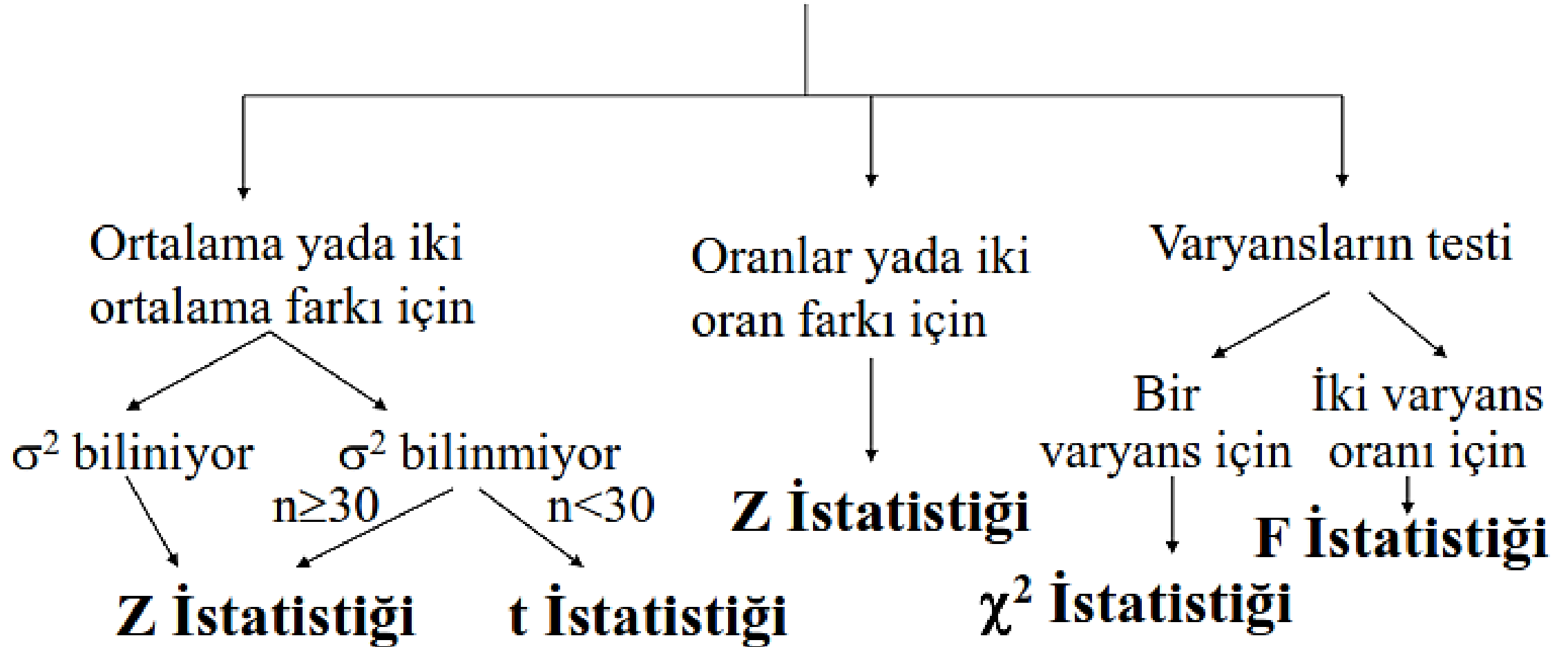
$H_0 : \mu \leq \mu_0$   
 $H_1 : \mu > \mu_0$  } TEK TARAFLI TEST  
(Sağ taraf testi)

$H_0 : \mu \geq \mu_0$   
 $H_1 : \mu < \mu_0$  } TEK TARAFLI TEST  
(Sol taraf testi)



# Hipotez Testinde

## Test İstatistiğinin Belirlenmesi



# Test İstatistiğinin Belirlenmesi

**Kitle ortalamasının anlamlılık testinde daha önce belirtilen koşullar sağlandığında yararlanılacak test istatistiği,  $n$ , örneklemden denek sayısını göstermek üzere**

**Kitle varyansı bilindiğinde,**

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

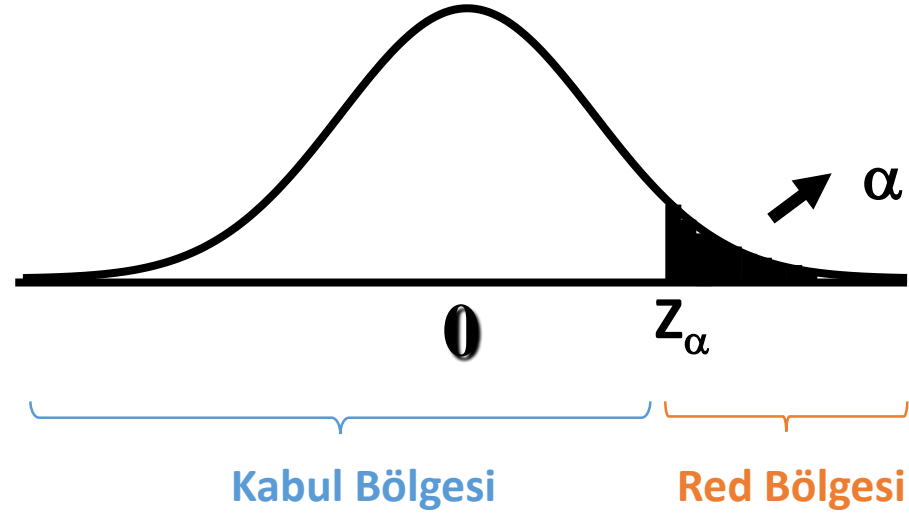
**Kitle varyansı bilinmediğinde,**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

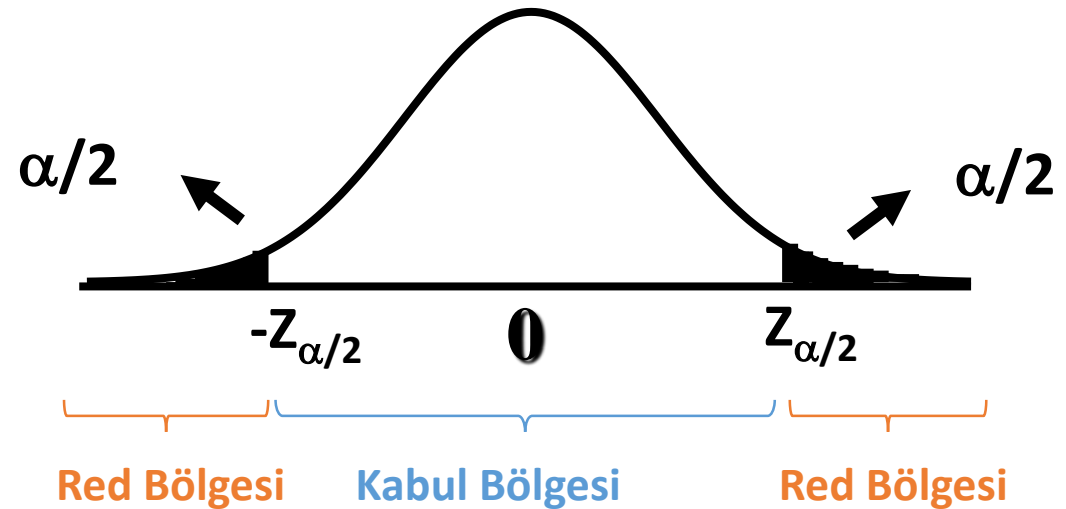
# *Z* istatistiği için

## $H_0$ Kabul ve Red Bölgeleri

$H_1$  Tek Yönlü



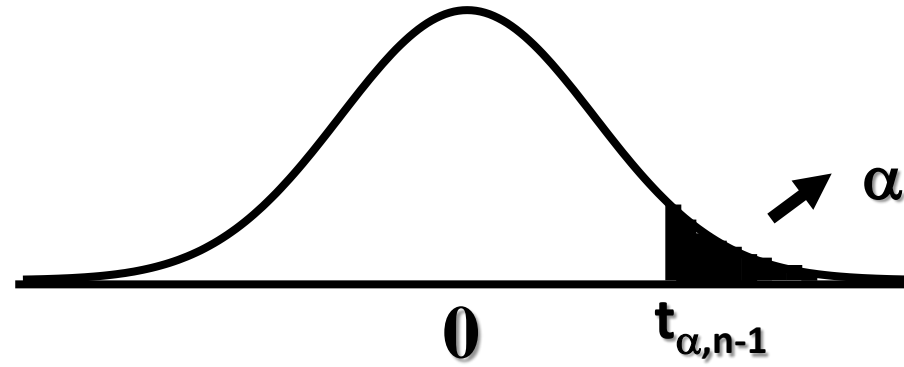
$H_1$  İki Yönlü



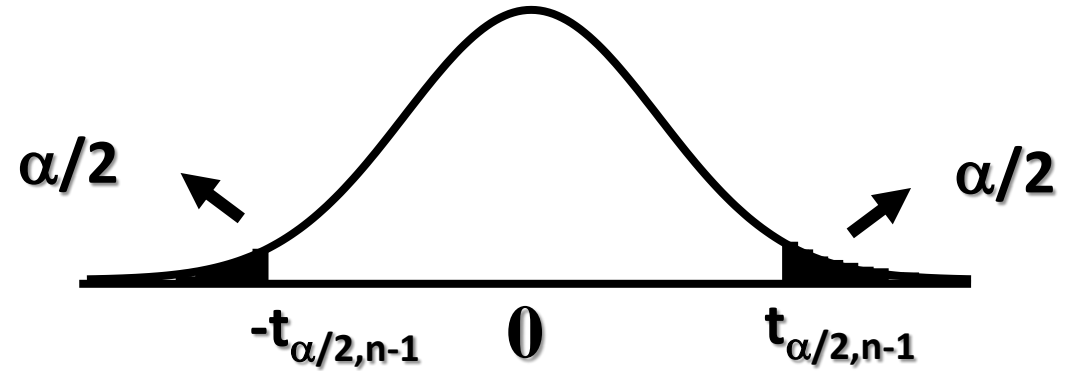
## *t* istatistiği için

**$H_0$  Kabul ve Red Bölgeleri**

**$H_1$  Tek Yönlü**



**$H_1$  İki Yönlü**



## Standart Normal Dağılım Tablosu

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952





# t Dağılımı Tablosu

TEK YÖNLÜ (BİR YANLI) TEST İÇİN $\alpha$												
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
İKİ YÖNLÜ (İKİ YANLI) TEST İÇİN $\alpha$												
	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.04	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
sd												
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	15.890	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.150	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.631	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.295	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
$\infty$	0.674	0.841	1.036	1.282	1.640	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

## $H_0$ için kabul ve red kriterleri

$Z > Z_{\alpha}$ ya da $Z > Z_{\alpha/2}$	}	$H_0$ Red
$t > t_{\alpha}$ ya da $t > t_{\alpha/2}$		
$t < t_{\alpha}$ ya da $t < t_{\alpha/2}$	}	$H_0$ Kabul
$Z < Z_{\alpha}$ ya da $Z < Z_{\alpha/2}$		
$P < \alpha$ ya da $P < \alpha/2$	}	$H_0$ Red
$P > \alpha$ ya da $P > \alpha/2$		

**Örnek:** Bir fabrikada üretilmekte olan vidaların boylarının ortalaması 100 mm, ve standart sapması 2 mm olan normal dağılım gösterdikleri bilinmektedir. Makinalarda olan bir arıza giderildikten sonra üretilen vidalardan alınan 9 vidalık bir örneğin bot ortalaması 102 mm olarak bulunmuştur. **Makinalardaki arıza giderilirken vidaların boyunun ayarı bozulmuş mudur?**  $\alpha=0.05$  için test ediniz ve yorumlayınız.

1. Adım: Hipotezlerin belirlenmesi

$$H_0 : \mu = 100mm$$

$$H_1 : \mu \neq 100mm$$

2. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

$$Z_{hesap} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{102 - 100}{2 / \sqrt{9}} = 3$$

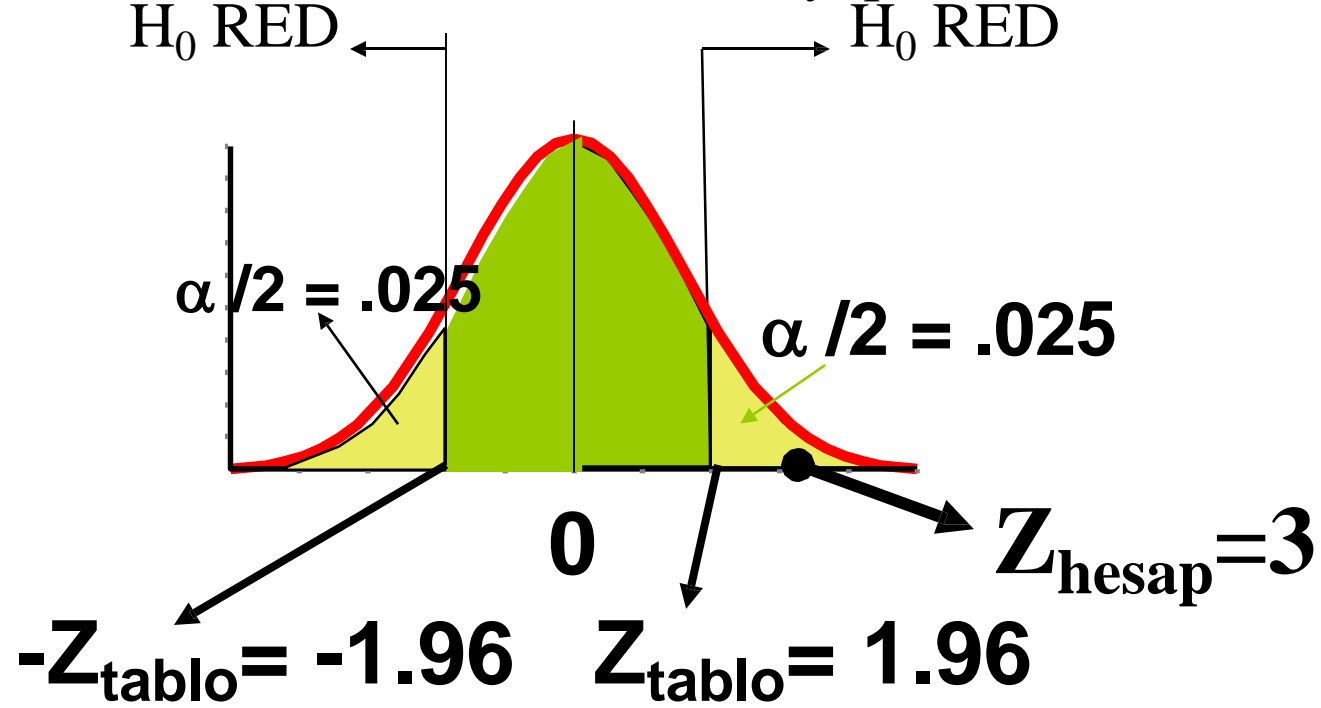
$$\mu = 100mm$$

$$\sigma = 2m$$

$$n = 9$$

$$\bar{X} = 102mm$$

**4. Adım:** İstatistiksel karşılaştırmanın yapılması:



**5. Adım:** Karar verme ve yorumlama:

$Z_{\text{hesap}}$  değeri  $H_0$  RED bölgesine düştüğü için  $H_0$  hipotezi reddedilir, yani vidaları boy ortalaması 100 mm'den farklıdır, makinanın ayarı bozulmuştur.

**Örnek:** Kolesterol ortalaması 190 standart sapması 45 olan 100 kişilik çalışma örnekleminin ortalaması 180, standart sapması 58 olan bir kitleye ait midir?

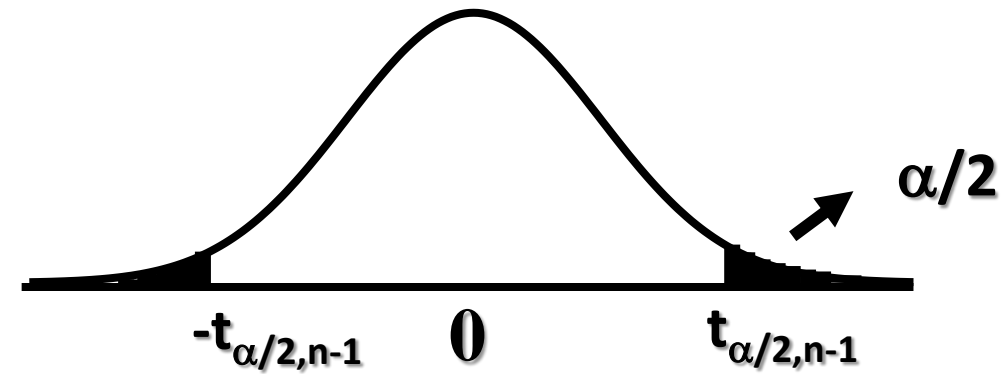
$$\bar{x} = 190 \quad S = 45 \quad n = 100$$

$$\mu = 180 \quad \sigma = 58$$

$$H_0 : \mu = 180 \quad H_1 : \mu \neq 180$$

$$t = \frac{190 - 180}{58 / \sqrt{100}} = 1.72 \quad \alpha = 0.05 \quad t_{(99, 0.025)} = 1.98$$

$$t_{\text{hesap}} = 1.72 < t_{\text{tablo}} = 1.98 \quad H_0 \text{ Kabul edilir.}$$



**Örnek:** Bu sene Trakya Üniv. Sağlık Yönetimi bölümünden mezun olacak öğrencilerin mezuniyet not ortalamalarının 70 olduğu iddia edilmektedir. Bu amaçla mezuniyet sonrası 36 öğrencilik bir örnek alınmış ve mezuniyet ortalamalarının 66, standart sapmasının 12 olduğu bulunmuştur. Bu veriler çerçevesinde iddiayı  $\alpha=0.01$  için test ediniz.

$$H_0 : \mu=70$$

$$H_1 : \mu \neq 70$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{66 - 70}{12 / 6} = \frac{-4}{2} = -2$$

- $\alpha = 0.01$  için z tablo değeri 2.58
- $|z_{hes}| < |z_{tab}|$   $H_0$  red edilemez

# Tek Taraflı Z Testi Örneđi

- Bir kutu mısır gevreğinin ağırlığının 368 gr'dan fazla olduğu iddia edilmektedir. Ayrıca  $\sigma = 15$  gram olduğunu belirtmiştir.

$n = 25$  kutuluk bir örnek alınmış ve  $\bar{X} = 372.5$  gr. olarak bulunmuştur. 0.05 seviyesinde test ediniz.

# Çözüm

$$H_0: \mu \leq 368$$

$$H_1: \mu > 368$$

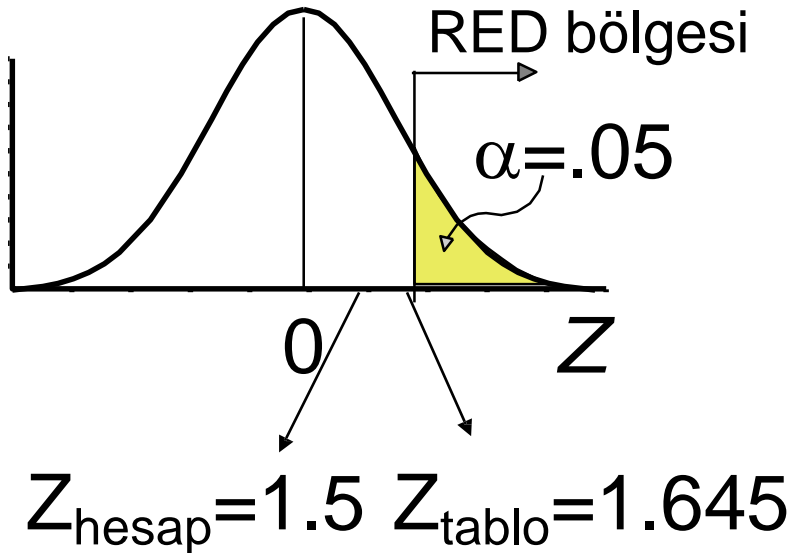
$$\alpha = 0.05$$

$$n = 25$$

**Test İstatistiği:**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372.5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1.50$$

• **Kritik değer:**



**Karar:**

$\alpha = .05$  için  $H_0$  hipotezi reddedilemez.

**Yorum:**

Ortalamanın 368 gr.dan fazla olduğuna dair yeterli kanıt yoktur.



# ORANLARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : P = P_0$$

$$H_1 : P \neq P_0$$

Sol Kuyruk  
Testi

$$H_0 : P \geq P_0$$

$$H_1 : P < P_0$$

Sağ Kuyruk Testi

$$H_0 : P \leq P_0$$

$$H_1 : P > P_0$$

Örnekten hesaplanan oran  $p$  ile gösterilirse oranlarla ilgili test istatistiği;

$$Z = \frac{p - P}{s_p} = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{P(1 - P)}{n}}}$$

**Örnek:** Bir bölgeden rasgele seçilen 125 yetişkinin 10'unda beslenme bozukluğu görüldüğüne göre bu bölgede beslenme bozukluğu görülme sıklığı 0.06 dan büyük kabul edilebilir mi ?

$$p=0.08, \quad P=0.06, \quad n=125$$

$$H_0 : P = 0.06$$

$$H_1 : P > 0.06$$

$$Z = \frac{0.08 - 0.06}{\sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{125}}} = 0,941$$

$\alpha=0.05$  için  $Z_{0.05}=1.645$  .  $H_0$  Kabul. Bu örneklemin çekildiği kitlede beslenme bozukluğu sıklığı 0.06'ya eşittir.