Temel Olasılık Kavramları

Yrd. Doç. Dr. Emre ATILGAN

OLASILIK

- Populasyon hakkında bilgi sahibi olmak amacı ile alınan örneklerden elde edilen bilgiler bire bir doğru olmayıp hepsi mutlaka bir hata payı taşımaktadır.

- Bu hata payının ortaya çıkmasının sebebi seçilen örneklerin şansa bağlı olarak farklılıklar göstermesi ve bunun sonucunda her deneyde farklı sonuçlarla karşılaşılmasıdır.

- ***Olasılık, herhangi bir deneyin sonucunda gözlenebilecek farklı durumlar ile hangi sıklıkla karşılaşılacağı bir başka ifadeyle ortaya çıkan olayların belirsizliğinin incelenmesi anlamına gelir.***

- ***Olasılık bir diğer ifadeyle bir olayın meydana gelme şansının sayısal ifadesidir.***
- 17 yy.'da şans oyunlarıyla birlikte kullanılmaya başlanan olasılık, uygulamalı matematiğin bir dalı olarak gelişim göstermiş ve istatistiksel yorumlamada önemli uygulama alanı bulmuştur.

Örnekler:

- *Madeni paranın atılması sonucu tura gelme olasılığı,*
- *Bir deste iskambil kağıdından çekilen 2 kağıdın en az birinin papaz olma olasılığı,*
- *Nişanlı olan bir çiftin evlenme olasılığı.???*

Temel Tanımlar ve Kavramlar-I

- ***Tekrarlanabilir Deney***: Sonucu kesin olarak kestirimlenemeyen bir tek çıktı (şans değişkeni) oluşturan bir eylem, gözlem ya da süreçtir.

Örnek: madeni para atılması, içinde 5 sarı 7 lacivert bilye bulunan torbadan bir top çekilmesi.

- ***Basit Olay***: Bir deneyin çıktısı daha basit bir çıktı olarak ayrıştırılamıyorsa basit olaydır.

Örnek: hilesiz bir zarın atılması sonucu 2 gelmesi, bir deste iskambil kağıdından çekilen kağıdın maça as olması.

Temel Tanımlar ve Kavramlar-II

- ***Olay**:* Birden fazla basit olayın bir araya gelmesi sonucu oluşur.

Örnek: hilesiz bir zarın atılması sonucu asal sayı gelmesi, içinde 5 sarı 7 lacivert bilye bulunan torbadan 2 top çekildiğinde birinin sarı birinin lacivert olması.

- ***Örnek Uzayı:*** Bir deneyin sonucunda elde edilen tüm mümkün basit olaylarının oluşturduğu kümedir. Genellikle S ile tanımlanır.

Örnek: Hilesiz bir zarın atılması sonucu elde edilen örnek uzayı;

x: zarın üst yüzünde gelen sayı

$S = \{ x;\ x = 1,2,3,4,5,6 \}$

Temel Tanımlar ve Kavramlar-III

- ***Ayrık Olay**:* Eğer A ve B gibi iki olay aynı anda geçekleşemiyor ise bu olaylara ayrık(birbirini engelleyen) olaylar denir

Örnek: Madeni para atılması sonucunda yazı veya tura gelmesi ayrık olaylardır**.**

Zarın atılması sonucu 1 ve tek sayı gelmesi olayları ayrık olaylar değildirler. Çünkü aynı anda gerçekleşebilirler.

- ***Eşit Olasılıklı Olaylar:*** Bir örnek uzayındaki tüm basit olayların ortaya çıkma olasılığı eşit ise bu olaylara eşit olasılıklı olaylar denir.

Örnek: Bir deste iskambil kağıdından bir adet kağıt çekilmesi.

Olasılığın İki Temel Kuralı;

1) Tüm basit olayların olasılıkları 0 ile 1 arasındadır.

2) Bir örnek uzayındaki tüm basit olayların ortaya çıkma olasılıklarının toplamı 1'e eşittir.

DİKKAT!!!!

Hiç bir olayın OLASILIĞI 1'den büyük olamaz!!!!

- Bir A olayın ortaya çıkma olasılığı;

P(A)

şeklinde gösterilir.

Olasılığın Gelişim Aşamaları

- Klasik (A Priori) Olasılık
- Frekans (A Posteriori) Olasılığı
- Aksiyom Olasılığı

NOT:Bu sıralama olasılık teorisinin tarihsel gelişimini tanımlamaktadır.

Klasik Olasılık

- Eğer bir örnek uzayı n(S) adet ayrık ve eşit olasılıkla ortaya çıkan basit olaylardan oluşuyor ve örnek uzayındaki basit olaylardan n(A) adedi A olayının özelliğine sahip ise A'nın olasılığı:

$$P(A) = n(A) / n(S)$$

kesri ile elde edilir

- Klasik olasılık TÜMDENGELİME dayanan çıkarımlar yaparak olasılığı bulur.

Örnek: Bir kapta 5 sarı, 5 lacivert ve 5 adet yeşil bilye bulunmaktadır. Çekilen bir bilyenin sarı olma olasılığı nedir?

A: Çekilen bir bilyenin sarı olması

n(S): Örnek uzayı eleman sayısı = 15

n(A): Örnek uzayındaki A elemanı sayısı = 5

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Klasik Olasılık Niçin Yetersizdir?

- Örnek uzayının eleman sayısı sonsuz olduğu durumlarda,

- Eşit olasılıklı olay varsayımı yapılamadığı durumlarda ,
  - *Tümdengelim çıkarımları yapılamadığında*

klasik olasılık ile hesaplama yapılamayacağından dolayı yetersizdir.

Ne Yapılabilir?

- *Araştırılan anakütle üzerinde tekrarlı deneyler gerçekleştirilerek sonuçlar analiz edilmek üzere kayıt edilmelidir.*

Frekans Olasılığı

- Araştırılan anakütle üzerinde n adet deney uygulanır. Yapılan bu deneylerde ilgilenilen A olayı n(A) defa gözlenmiş ise A olayının göreli frekansı (yaklaşık olasılığı):

$$P(A) = n(A) / n$$

olarak bulunur.

Örnek:

Bir fabrikanın üretmiş olduğu televizyonların hatalı olma olasılığı *p* nedir?

Önce örnek uzayı oluşturulur:

S={sağlam,hatalı}

Klasik olasılığa göre (eşit olasılıklı olaylar) p=0.5 olup gerçeği yansıttığı şüphelidir.

Yapılması gereken örneklem alarak

$$p = n(H) / n$$

olasılığını hesaplamaktır.

Frekans Olasılığının Kararlılık Özelliği

- Gerçekleştirilen deney sayısı arttıkça P(A) olasılık değerindeki değişkenlik azalacak ve giderek bir sabit değere yaklaşacaktır. Bu duruma ***kararlılık özelliği*** adı verilir.
- Bir olayın olasılığı deneyin tekrarlama sayısı sonsuza yaklaşırken o olayın göreli frekansının alacağı limit değer olarak tanımlanır:

$$p = P(A) = \lim_{n \to \infty} n(A) / n$$

Frekans Olasılığı Niçin Yetersizdir?

- Olasılığın kararlılık değerine ulaştığı deneme sayısı kaçtır?

- Sonsuz adet deneme yapmak mümkün değildir.

- Aynı deney iki defa aynı tekrar sayısı ile gerçekleştirildiğinde elde edilen olasılıklardan hangisi olayın olasılığı olarak kabul görecektir?

Aksiyom Olasılığı Nedir?

- Olasılığın matematiksel teorisini tanımlar.
- Bu teorinin oluşturduğu **ideal modeller** yaşadığımız dünyanın problemlerini çözmede kullanılır.

- Olasılığın iki genel tipinin sahip olduğu önemli ortak nokta: Her ikisinin de, benzer koşullarda (teorik olarak aynı koşullarda) uygulanan deneylere gereksinim duymasıdır.

- Bununla birlikte benzer koşullarda tekrarlı olarak uygulanamayan durumlarda olasılıkların hesaplanmasında AKSİYOM OLASILIĞI yardımcı olur.

Benzer Koşullarda Tekrarlı Olarak Uygulanamayan Durumlara Örnekler:

- Türkiye'nin 1 hafta içinde Kuzay Irağa sınır ötesi operasyon düzenleme olasılığı nedir?

- Çok hoşlandığınız bir arkadaşınızla çıkma olasılığı nedir?

- Fenerbahçe - Galatasaray maçının 6-0 bitmesi olasılığı nedir?

Aksiyomlar

- **Aksiyom 1:**
  - P(A) örnek uzayı S'deki her A olayı için $P(A)\geq 0$ olan bir gerçel sayıdır.
- **Aksiyom 2:**
  - $P(S)=1$ $\{ P(\varnothing)=0 \}$
- **Aksiyom 3:**
  - Eğer $S_1, S_2, \ldots$ Olaylarının her biri S'deki ayrık olaylar ise,diğer bir deyişle $S_i \cap S_j=\varnothing$ tüm $i\neq j$ için ise,

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots)=P(S_1)+P(S_2)+\ldots$$

Sadece Aksiyomlar Yeterli mi?

HAYIR

- Bu aksiyomların ve onlara bağlı teoremlerin faydalı bir model geliştirilmesinde bize yardımcı olabilmesi için, S örnek uzayındaki her bir A olayı için olasılığın hesaplanmasında kullanılacak bir FONKSİYONA ya da bir KURALA gereksinim vardır

- Bu fonksiyonlar İlgilenilen anakütlenin Tanımladığı ÖRNEK UZAYINA Göre Farklılık Gösterir.

Sık karşılaşılan üç farklı örnek uzayı;

- **Sonlu elemanlı kesikli örnek uzayı (sayılabilir sonlu)**
- **Genel kesikli örnek uzayı (sayılabilir sonsuz)**
- **Sürekli örnek uzayı (sayılamaz sonsuz)**

olarak ifade edilir.

- x : herhangi bir gün içinde yağmur yağması

  x = 0 (yağmur yağmaz)

  x = 1 (yağmur yağar)

Örnek Uzayı;

S = { x / 0, 1 }

veya

S = { x / Yağmursuz , Yağmurlu }

olarak belirlenir ve sayılabilir sonlu bir örnek uzayıdır.

• x : bir zar için 6 gelinceye kadar yapılan atış sayısı

Örnek Uzayı;

$S = \{ x \,/\, 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

olarak belirlenir ve sayılabilir sonsuz bir örnek uzayıdır. **(kesikli şans değişkeni)**

• x : öğrencilerin boyları

Örnek Uzayı;

$S = \{ x \,/\, 150 < x < 200 \}$

olarak belirlenir ve sayılamaz sonsuz bir örnek uzayıdır. **(sürekli şans değişkeni)**

Bazı Temel Olasılık Aksiyomları

1. $P(S) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. A olayının tümleyeni $\overline{A}$ olarak gösterilir.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. A ve B herhangi iki olay olmak üzere;

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. ***A ve B ayrık iki olay ise;***

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Örnek Uzayı ve Olay Sayısını Belirleyen Sayma Yöntemleri

- Klasik olasılığın diğer bir ifade ile eşit olasılıklı olayların geçerli olduğu durumlarda:
  - Örnek uzayının eleman sayısı,
  - İlgilenilen olayın eleman sayısının

  belirlenmesi gereklidir.

Kullanılan iki temel prensip;

1) Toplama Yöntemi

2) Çarpma Yöntemi

Toplama Yöntemi

- Bir A olayı *m* farklı şekilde, başka bir B olayı da *n* farklı şekilde oluşabilen **ayrık olaylar** ise;

A veya B olayı $n + m$ farklı şekilde oluşabilir.

Örnek: İstanbul'dan İzmir'e 2 farklı tren seferi, 4 farklı havayolu firması, 40 farklı otobüs firması ve 1 adet denizyolu firması ile gidilebildiğine göre İstanbul'dan İzmir'e kaç farklı şekilde gidilir?

$2 + 4 + 40 + 1 = 47$

Çarpma Yöntemi

- Bir A olayı *m* farklı şekilde, başka bir B olayı da *n* farklı şekilde oluşabilen ve **aynı anda oluşmaları mümkün olaylar** ise;

A ve B olayı *n* * *m* farklı şekilde oluşabilir.

Örnek: Bir iskambil destesinden çekilen iki kartın birinin Kupa diğerinin Maça olması kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

13 * 13 =169

NOT: Çarpma yöntemi bağımsız olaylar için kullanılır.

k farklı sonuç veren bir deney r kez tekrar edilirse ortaya çıkan tüm durumların sayısı;

$$k^r$$

olarak hesaplanır.

Örnek: Bir zarı 3 kez attığımızda ortaya çıkabilecek tüm mümkün durumların sayısı sayısı;

$6^3 = 216$ adettir.

- ***Örnek uzayının eleman sayısı 216'dır.***

Örnek Uzayı ve Olay Sayısının Büyük Olduğu Durumlar

Örnek uzayı ve olay sayısının büyük olduğu durumlarda kullanılan sayma yöntemleri;

– **Permütasyon**

– **Kombinasyon**

Permütasyon

- Sıraya konulacak *n* adet nesne olsun ve her biri sadece bir kez kullanılmak üzere kaç farklı sıralama yapılabilir?

$\boxed{n}\ \boxed{n-1}\ \boxed{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

n nesnenin mümkün sıralamalarının sayısı:

$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)=n!$ $\qquad {}_nP_n = n!$

- *n* tane nesne arasından seçilmiş *x* tane nesnenin permütasyon sayısı $_{n}P_{x}$ olarak ifade edilir.
- Toplam *n* tane nesne arasından *x* tane nesne seçilir ve bunlar sıraya konulursa ortaya çıkabilecek sıralamaların sayısıdır ve şu şekilde hesaplanır:

$$_{n}P_{x} = \frac{n!}{(n-x)!}$$

- **Kullanıldığı durumlar**
  - İadesiz örnekleme
  - Örneğe çıkış sırası önemli

Örnek: 8 atletin katıldığı 100 metre yarışmasında ilk üç dereceye girenler kaç farklı şekilde belirlenir ?

$$ {}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8*7*6 = 336 $$

Örnek: 2,3,5,6,7 ve 9 sayılarını kullanarak 4 basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç sayı oluşturulur?

$$ {}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6*5*4*3 = 360 $$

6	5	4	3	=360

Kombinasyon

- *n* adet nesne arasından seçilen *x* tanesinin kombinasyon sayısı ${}_{n}C_{x}$ ile gösterilir. Sıralama önemli olmaksızın tüm durumların sayısı olarak ifade edilir. Bu sayı şu şekilde hesaplanır:

$$ {}_{n}C_{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} $$

- Kullanıldığı durumlar;
  - İadesiz örnekleme
  - Örneğe çıkış sırası önemsiz

Örnek: Beş kişilik bir topluluktan üç kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilir ?

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5*4*3*2}{2*3*2} = 10 $$

Örnek: 10 bay ve 5 bayan arasından 2 bay ve 1 bayan üye içeren bir kurul kaç farklı şekilde oluşturulur?

$$ {}_{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10*9}{2} = 45 $$ (10 bay arasından 2 bay)

$$ {}_5C_1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5 $$ (5 bayan arasından 1 bayan)

Çarpım kuralı uygulanarak 45 * 5 =225 farklı şekilde oluşturulur.

Örnek: 10 işletme ve 8 iktisat öğrencisi arasından 5 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır. Rasgele bir seçim yapıldığında komisyonda çoğunlukla işletme öğrencisi olma olasılığı nedir?

5 işletme 0 iktisat, 4 işletme 1 iktisat, 3 işletme 2 iktisat

$$\frac{{}_{10}C_5 \; {}_{8}C_0}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_4 \; {}_{8}C_1}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_3 \; {}_{8}C_2}{{}_{18}C_5} = \frac{5292}{8568} \approx 0{,}62$$

Örnek: Ali ve Can isimli iki arkadaş zar atarak oyun oynuyorlar. Oyuna Ali başlıyor. Zar 1 veya 2 gelirse oyunu kazanıyor. 3,4 veya 5 gelirse oyuna devam etme hakkını kazanıyor. 6 gelirse zar atma sırası Veliye geçiyor. Ali'nin bu oyunu kazanma olasılığı bulunuz.

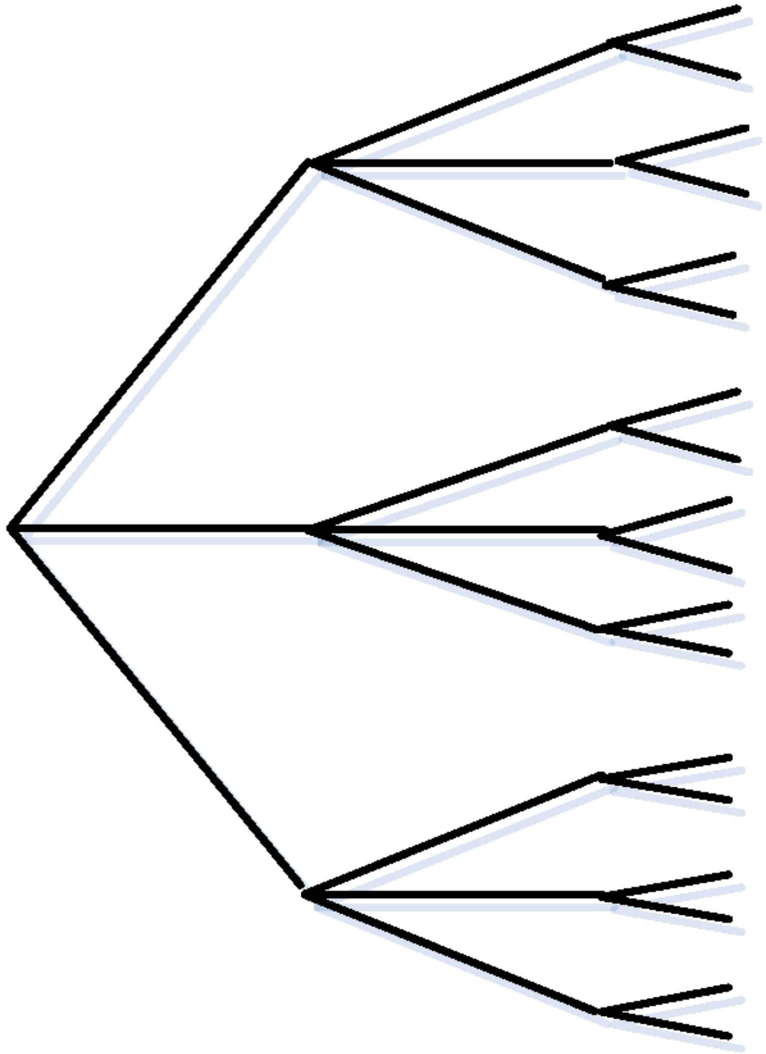
Ali'nin oyunu kazanma olasılığı p olsun,

- **Ali 1 veya 2 atar oyunu kazanır, olasılık : 2 / 6**
- **3,4 ve 5 atar oyuna tekrar devam eder ve sonra oyunu kazanır olasılık: (3/6)p**
- **İlk atışta 6 atar oyun cana geçer ve can oyunu kaybeder olasılık (1/6)(1-p)**

$p = 2/6 + (3/6)p + (1/6)(1-p) \quad \rightarrow p = 3/4$

Ağaç Diyagramı

- Her birinin sonucunun sonlu sayıda olduğu birden fazla deneyin tüm mümkün sonuçlarını görsel bir şekilde ortaya koymak için kullanılır.

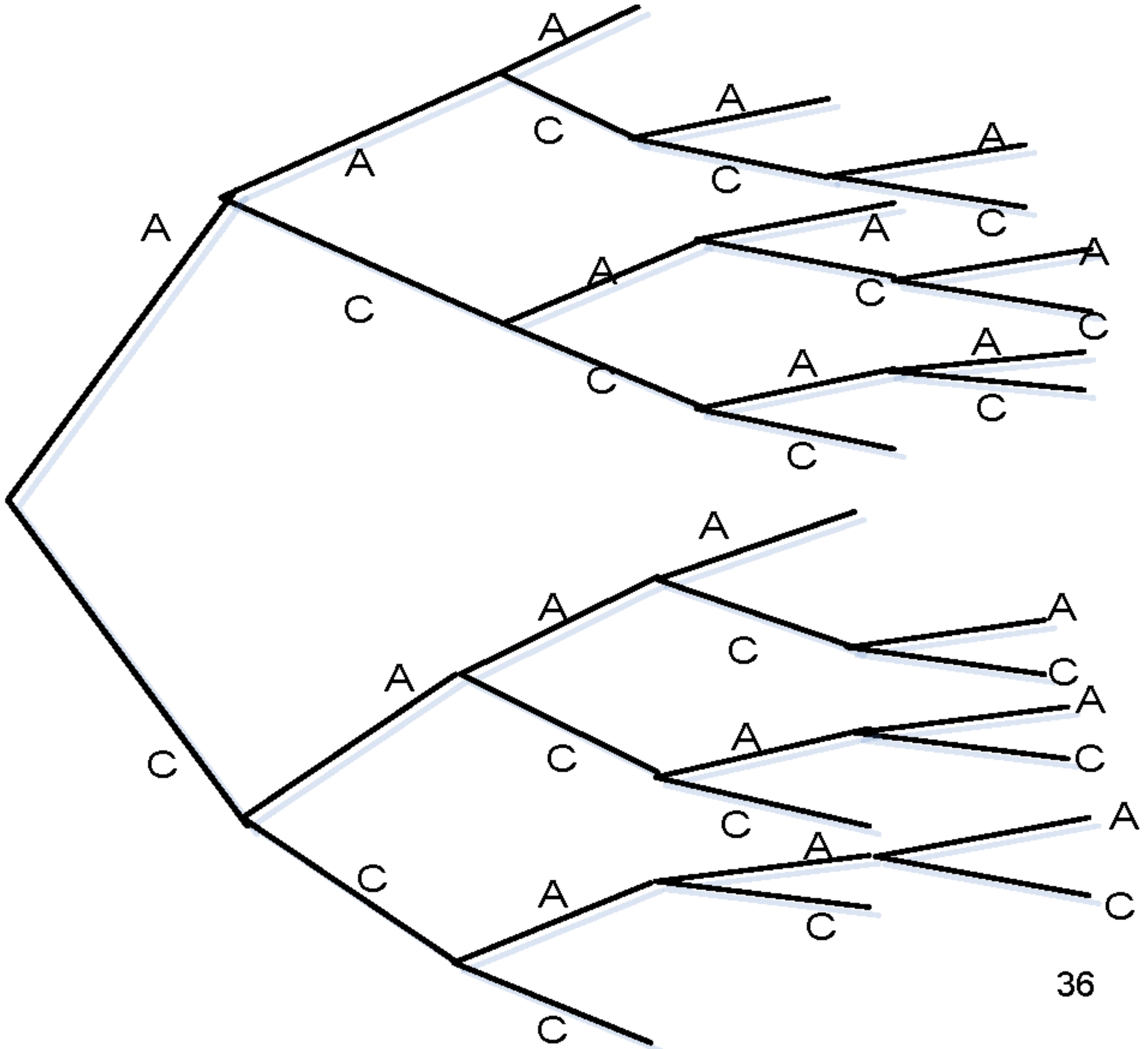


Örnek: Ali ile Can masa tenisi oynamaktadırlar. 3 set kazananın galip geleceği maçın ortaya çıkabilecek tüm mümkün sonuçlarını gösteren ağaç diyagramını oluşturunuz.

Olası Durumlar;

AAA,CCC
AACA,CCAC
ACAA,CACC
ACCC,CAAA
ACACA,CACAC
AACCA,CCAAC
AACCC,CCAAA
ACACC,CACAA
ACCAA,CAACC
ACCAC,CAACA

20 ADET



Şartlı Olasılık

A ve B gibi iki olaydan B olayının gerçekleştiği bilindiği durumda A olayının gerçekleşmesi olasılığına A olayının şartlı olasılığı denir .

P(A / B) ile gösterilir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A'nın gerçekleştiği bilindiğinde B 'nin ortaya çıkma olasılığı;

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$$

Örnek: Bir üniversitede okuyan öğrencilerin % 70'i tiyatroya, % 35 ise sinemaya ilgi duymaktadır.

a) Bir öğrencinin sinemaya ilgi duyduğu bilindiğinde tiyatroya ilgi duyma olasılığı 0,40 ise her iki aktiviteye birden ilgi duyma olasılığı nedir?

b) Bir öğrencinin tiyatro veya sinemaya ilgi duyma olasılığı nedir?

T:Tiyatroya ilgi duyma
P (T) = 0,70

S:Sinemaya ilgi duyma
P(S) = 0,35

a) P (T / S) = 0,40   P (T ∩ S) =?

$$P(T/S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)}$$

$$P(T \cap S) = P(T/S) * P(S) = 0,40 * 0,35 = 0,14$$

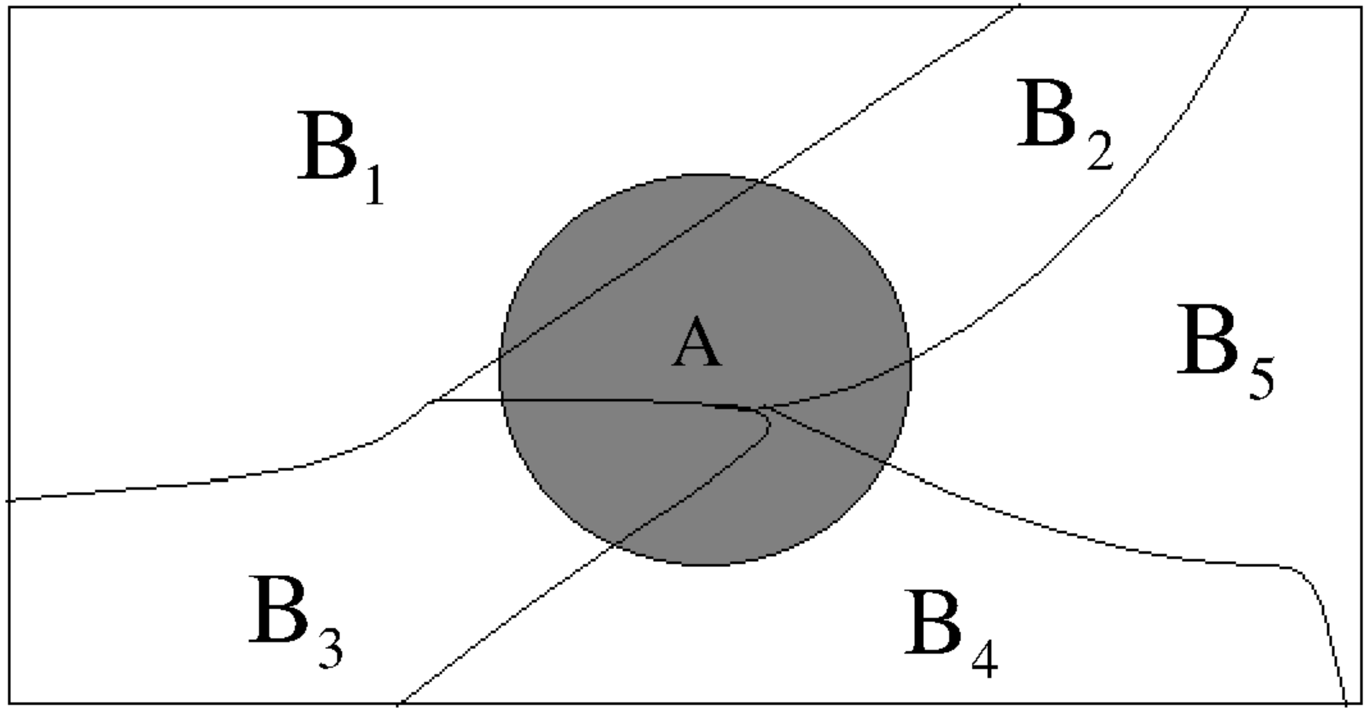
b)

$$P(T \, U \, S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S)$$

$$= 0,70 + 0,35 - 0,14 = 0,91$$

Şartlı Olasılıkların Bilindiği Durumlarda Tek Bir Olayın Olasılığının Bulunması

Aşağıdaki şekilde A olayının birbiriyle ayrık olan 5 farklı olayın birleşiminden meydana geldiği görülür.



A olayı her bir B olayı ile kesişimleri cinsinden ifade edildiğinde;(birbirini engelleyen olayların birleşiminin olasılığı toplama kuralına göre)

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_5)$$

$$P(A \cap B_i) = P(A/B_i).P(B_i)$$

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3) \\ + P(A/B_4)P(B_4) + P(A/B_5)P(B_5)$$

Örnek: Bir ilaç üç fabrika tarafından üretilmektedir. 1. Fabrikanın üretimi 2. ve 3. fabrikaların üretiminin 2 katıdır. Ayrıca 1. ve 2. fabrikalar % 2, 3. fabrika % 4 oranında bozuk ilaç üretmektedir. Üretilen tüm ilaçlar aynı depoda saklandığına göre bu depodan rast gele seçilen bir ilacın bozuk olma olasılığı nedir.

A = Seçilen ilacın bozuk olma olasılığı P (A) = ?

B_i= Seçilen ilacın i nci fabrikada üretilmesi

$P(B_1) = P(B_2) + P(B_3)$

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$ olduğundan;

$P(B_1) = 0,50$ $P(B_2) = P(B_3) = 0,25$ olarak elde edilir.

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)$$

P(A)=(0.02)(0.5)+(0.02)(0.25)+(0.04)(0.25)=0,025

Depodan seçilen 1000 ürünün 25 tanesinin hatalıdır.

Bayes Teoremi

- Sonucun bilindiği durumda sebebin hangi olasılıkla hangi olaydan meydana geldiği ile ilgilenir.

- Ele alınan örnekte depodan rast gele seçilen bir ilacın bozuk çıkması halinde 1.fabrikadan gelmesinin olasılığı araştırıldığında Bayes Teoremine ihtiyaç duyulmaktadır.

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i)}$$

Depodan rasgele seçilen bir ilacın bozuk olduğu bilindiğine göre 1 nci fabrikadan gelmiş olma olasılığı;

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{(0.02)(0.5)}{(0.02)(0.5) + (0.02)(0.25) + (0.04)(0.25)} = 0{,}40$$

Bağımsız Olaylar

Ele alınan olaylardan birinin gözlenip gözlenmemesinin olasılığı diğer bir olayın ortaya çıkıp çıkmama olasılığını etkilemiyorsa bu olaylara bağımsız olaylar denir.

$P (A \cap B) = P (A / B) . P (B) = P (B / A) . P (A)$

A ve B olayları bağımsız ise bir başka ifadeyle B olayının meydana gelme olasılığı A olayının meydana gelme olasılığına bağlı değil ise ve iki olay aynı anda meydana gelebiliyor ise;

$P (A / B) = P (A)$ ve $P (B / A) = P (B)$ olur.

Sonuç olarak A ve B olayları bağımsız iseler

$\mathbf{P (A \cap B) = P (A) . P (B)}$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde $P (A \cap B) = P (A) . P (B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır denir.

Örnek: Ali ve Can isimli iki avcının bir hedefi vurma olasılıkları sırasıyla 0,65 ve 0,40 olarak verilmiştir. İki avcı hedefe birlikte ateş ettiğinde hedefin vurulma olasılığı nedir?

A = Ali'nin hedefi vurması $P(A) = 0,65$

C = Can'ın hedefi vurması $P(C) = 0,40$

$P(A \cup C) = ?$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

Ali ile Can'nın hedefi vurmaları birbirinden bağımsız olduğundan;

$$P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C) = 0,65 * 0,40 = 0,26$$

$$P(A \cup C) = 0,65 + 0,40 - 0,26 = 0,79$$